Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

# Oppfriskningskurs Sommer 2018

## Øving 4

**1** Forenkle uttrykkene.

**a)** $\frac{\sin(x)\cos^2(x)+\sin^3(x)}{2\cos(x)}$

**b)** $\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

**2** Vis følgende trigonometriske identiteter.

**a)** $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$

**b)** $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \tan^2(\frac{x}{2})$

**3** Tegn grafene til sinus, cosinus og tangens med frihånd over to perioder (f. eks. $[0, 4\pi]$).

**4** Vi skal nå beregne noen eksaktverdier for sinus og cosinus "fra scratch".

**a)** Forklar, med utgangspunkt i enhetssirkelen, hvorfor $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ og $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

**b)** Bruk verdiene over til å finne $\sin\frac{\pi}{4}$ og $\cos\frac{\pi}{4}$. (Hint: Cosinussetningen.)

**c)** Finn $\cos\frac{\pi}{3}$. (Hint: 30-60-90-regelen.)

**d)** Bruk verdien over til å finne $\sin\frac{\pi}{3}$.

**e)** Bestem nå $\sin\frac{2\pi}{3}$ og $\cos\frac{2\pi}{3}$.

**5** Skissér grafene for $x \in [0, 2\pi]$.

**a)** $\sin(\pi x)$

**b)** $1 + \cos(x + \frac{\pi}{4})$

**c)** $\sin^2 x$

**d)** $f(x) = \begin{cases} \cos x \text{ hvis } 0 \le x \le \pi \\ \sin x \text{ hvis } \pi < x \le 2\pi \end{cases}$

**e)** $2^x \sin(2x)$

**6** Finn den generelle løsningen til ligningene.

**a)** $\cos(2x + \pi) = -1$

**b)** $2\sin^2(x) + \sin(x) = 0$

**c)** $\sin(2x)\cos(x) = 0$

**d)** $\tan(x) = -1$

$\boxed{7}$ Løs ulikhetene.

**a)** $\sin x \geq 0$

**b)** $\tan x > 1$

**c)** $\cos x > 1$

$\boxed{8}$ Vis trekantulikheten, dvs. at $|a + b| \leq |a| + |b|$ for alle $a, b \in \mathbb{R}$. (Hint: betrakt kvadratene.)

$\boxed{9}$ Bevis følgende utsagn ved induksjon.

**a)** $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ for alle heltall $n \geq 1$.

**b)** $4^n - 1$ er delelig med 3 for alle heltall $n \geq 1$.

**c)** $\cos(u) \cdot \cos(2u) \cdot \cos(2^2u) \cdots \cos(2^{n-1}u) = \frac{sin(2^n u)}{2^n \sin(u)}$ for alle heltall $n \geq 1$.

$\boxed{\text{Ekstraoppgave 1}}$ Bevis at dersom $n^2$ er et partall, så er $n$ et partall. (Hint: bruk et kontrapositivt bevis, dvs. vis at dersom $n$ er odde så er $n^2$ odde. Bruk at ethvert oddetall kan skrives som $2k + 1$ for en $k \in \mathbb{Z}$.)

$\boxed{\text{Ekstraoppgave 2}}$ Vis at $\sqrt{3}$ er et irrasjonalt tall. (Hint: bruk et selvmotsigelsesbevis. Anta at $\sqrt{3}$ kan skrives som en brøk (hvor teller og nevner ikke har noen felles primtallsfaktorer), kvadrer uttrykket og oppnå så en selvmotsigelse.)

$\boxed{\text{Ekstraoppgave 3}}$ Finn feilen i følgende "induksjonsbevis":

**Påstand**: Alle hester har samme farge.

Vi viser ved induksjon at for ethvert naturlig tall $n$, så vil enhver samling med $n$ hester ha samme farge.

**Grunnsteget**: Trivielt for $n = 1$. For hvis vi har en samling bestående av kun én hest så har alle (dvs. den ene) hesten(e) samme farge.

**Induksjonshypotesen**: Anta at enhver samling med $n = k$ hester har samme farge.

**Induksjonssteget**: Vi må nå vise ved hjelp av induksjonshypotesen at enhver samling med $n = k + 1$ hester har samme farge. Først, ekskluder den siste hesten og betrakt de første $k$ hestene. Ved induksjonshypotesen har alle disse samme farge. Se nå bort fra den første hesten og betrakt de siste $k$ hestene. Disse må også ha samme farge. Den første hesten har derfor samme farge som de midterste hestene, som igjen har samme farge som den siste hesten. Ergo har alle de $k+1$ hestene samme farge.

Vi har nå vist, ved matematisk induksjon, at alle hester har samme farge.

**Oppsummeringsoppgave 1** Gå tilbake og gjør de oppgavene du ikke har rukket å gjøre tidligere i uka. (:

## Fasit (med forbehold om feil)

**1** $\frac{1}{2}\tan x, \quad -\sqrt{2}\cos x$

**2** Spør studass.

**3** Spør studass.

**4** **b)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ og $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, **c)** $\frac{1}{2}$, **d)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, **e)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ og $-\dfrac{1}{2}$

**5** Spør studass.

**6** **a)** $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, **b)** $x = n\pi \ \vee\ x = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi \ \vee\ x = \frac{11\pi}{6} + 2n\pi$, **c)** $x = \frac{n\pi}{2}$,
**d)** $x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$ (for $n \in \mathbb{N}$ i alle oppgavene.)

**7** **a)** $2\pi n \leq x \leq 2\pi n + \pi$, **b)** $n\pi - \frac{3\pi}{4} < x < n\pi - \frac{\pi}{2}$,
**c)** ingen løsning (for $n \in \mathbb{N}$ i alle oppgavene.)

**8** Spør studass.

**9** Spør studass.

**E1-3** Spør studass.