



Oppgave 9 fra Øving 2

a) Er funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{hvis } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{hvis } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

en-til-en? Hvorfor/hvorfor ikke?

b) Vis at funksjonen  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  er en-til-en. Finn inversfunksjonen  $f^{-1}$ .

2 La  $p(x) = x^5((x-2)^2 + 2x - 5)^8$ .

a) Hva er graden til polynomet  $p(x)$ ?

b) Finn alle røttene til  $p(x)$ .

c) Faktoriser  $p(x)$  så mye som mulig (dvs. som et produkt av lineære polynomer og kvadratiske polynomer uten røtter).

3 a) La  $p = 21008$  og  $d = 7$ , finn heltall  $q, r$  slik at

$$\frac{p}{d} = q + \frac{r}{d} \\ r < d$$

b) La  $p(x) = 21x^2 + 10x + 2$  og  $d(x) = 7x + 1$ , finn polynomer  $q(x), r(x)$  slik at

$$\frac{p}{d} = q + \frac{r}{d} \\ \deg(r) < \deg(d)$$

hvor  $\deg(p)$  er graden til et polynom.

4 Bruk polynomdivisjon på  $p(x)/d(x)$ , hvor  $p(x) = x^5$  og  $d(x) = x^2 - x + 1$ . Etter at du har regnet det ut; sjekk at svaret er riktig ved å gange sammen og plusse sammen de relevante polynomene.

5 La  $q(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$ .

a) Vis at  $-1$  og  $1$  er røtter til  $q(x)$ .

b) Faktoriser nå  $q(x)$  så mye som mulig. (Hint: bruk polynomdivisjon på  $\frac{q(x)}{x^2 - 1}$ , og finn så røttene til resultatet du får. Hvor kommer nevneren fra?)

6 Finn alle løsninger av ligningene.

a)  $2x^3 + 10x^2 + 12x = 0$

b)  $8x^6 + 8x^4 - 2x^2 - 2 = 0$  (hint: substituer  $u = 2x^2$ )

c)  $\frac{4}{1+x} + \frac{4}{1-x} = -1$

7 Løs følgende ligninger for  $x$ , ved å uttrykke  $x$  ved hjelp av konstanter, variabler og/eller tall.

a)  $4\pi x \cdot 2y \cdot (1 - 4A) = 7$

b)  $2yzx + 2(xy^2z)^2 - 4 = \pi C^2$

8 Bestem eventuelle asymptoter til funksjonene. Skissér deretter grafene sammen med asymptotene.

a)  $f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 1}$

b)  $g(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

9 Løs ulikhetene. (Hint: det kan være nyttige å skissere hver side av ulikheten i samme koordinatsystem for å se hvilket område ulikheten beskriver.)

a)  $-x^2 > \pi$

b)  $e^{(x-10)} < 5$

c)  $\ln^2(x) > 1$

d)  $\frac{1}{x} > x$

e)  $\sqrt{(x-2)^2 + 8x} > 1$

f)  $x^2 - 2x \leq 0$

g)  $\frac{x}{2} \geq 1 + \frac{4}{x}$

h)  $3^x \geq 3$

10 Forenkler uttrykkene så mye som mulig.

a)  $(x^{-3})^{-2}$

- b)  $\log_5 125$
- c)  $\log_{1/3} 3^{2x}$
- d)  $10^{-\log_{10} \frac{1}{x}}$
- e)  $\frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x} - e^{-2x}}$

**11** Finn alle løsninger av ligningene.

- a)  $(\log_5 x)^2 = 20 - 4 \log_5(x^2)$
- b)  $\log_4(x + 4) - 2 \log_4(x + 1) = \frac{1}{2}$

**12** Betrakt funksjonene  $f(x) = x^3$  og  $g(x) = 3^x$ .

- a) Beregn  $f(5)$  og  $g(5)$ .
- b) Løs ligningene  $f(x) = 1$  og  $g(x) = 1$ .
- c) Skriv  $f(20)$  og  $g(20)$  på standardform.
- d) Skriv  $f(-20)$  og  $g(-20)$  på standardform.
- e) Skisser de to funksjonene svært omtrentlig og merk deg hvor forskjellige de er.

**13** Fornuftige Jonas har bestemt seg for å avsette alle konfirmasjonspengene sine til pensjonssparing. Han har en drøm om å bli millionær på pensjonspengene sine, og leve et liv i sus og dus på Granca. Hvis vi antar at Jonas vil få 6% rente på pensjonsfondet sitt, hvor mye må han minst klare å skrape sammen til konfirmasjonen sin for at pengene skal vokse over 1 000 000 kr innen han pensjonerer seg som 70-åring?

**Ekstraoppgave 1** Reidun fikk 20 000 kr til konfirmasjonen. Disse pengene har stått på fastrente-konto i 7 år. Nå er de blitt til 30 000 kr. Hvor god rente fikk Reidun av banken?

**Ekstraoppgave 2** De såkalte *hyperbolske funksjonene* er definert som følger:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (\text{sinus hyperbolicus})$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (\text{cosinus hyperbolicus})$$

Vis at de hyperbolske funksjonene tilfredsstiller følgende identiteter.

- a)  $\sinh(-x) = -\sinh(x)$
- b)  $\cosh(-x) = \cosh(x)$
- c)  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

d)  $\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$

**Ekstraoppgave 3** Vi skal nå bevise  $abc$ -formelen. Nemlig at

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{har løsning(ene)} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

såfremt  $b^2 - 4ac \geq 0$ . Vi gjør det stegvis.

a) Vis første kvadratsetning,

$$(x + D)^2 = x^2 + 2Dx + D^2$$

for alle tall  $x$  og  $D$ .

b) Bruk første kvadratsetning til å vise at

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}.$$

c) Ta nå utgangspunkt i  $ax^2 + bx + c = 0$  og vis (ved å bruke **b**) at

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Hva må vi kreve om konstanten  $a$  for å få lov til å dele på den over alt?

d) Vis med dette at

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|}.$$

e) Ved å løse opp absoluttverditegnet på venstre side får vi

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|},$$

hvorfor kan vi nå ta bort absoluttverditegnet rundt  $2a$ ?

f) Vis nå  $abc$ -formelen.

### Fasit (med forbehold om feil)

**2** a) 21,    b)  $0, 1 \pm \sqrt{2}$ ,    c)  $x^5(x - 1 - \sqrt{2})^8(x - 1 + \sqrt{2})^8$

**3**  $3001 + \frac{1}{7}$ ,     $3x + 1 + \frac{1}{7x + 1}$

**4**  $x^3 + x^2 - 1 + \frac{1 - x}{x^2 - x + 1}$

5 b)  $(x - 1)(x + 1)(x + 2)(x + 3)$

6 a)  $0, -2 - 3$ , b)  $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ , c)  $\pm 3$

7 a)  $x = \frac{7}{8\pi(1 - 4A)y}$ , b)  $x = \frac{-yz \pm \sqrt{y^2 z^2 (2(\pi c^2 + 4)y^2 + 1)}}{2y^4 z^2}$

8 a)  $y = 3$  (horisontal)  $x = \pm 1$  (vertikale), b)  $y = x$  (skrå) (ingen vertikale)

9 a) ingen løsning, b)  $x < 10 + \ln 5$ , c)  $0 < x < \frac{1}{e} \vee x > e$ ,  
 d)  $0 < x < 1 \vee x < -1$ , e)  $x > -1 \vee x < -3$ , f)  $0 \leq x \leq 2$ ,  
 g)  $x \geq 4 \vee -2 \leq x < 0$ , h)  $x \geq 1$

10  $x^6$ ,  $3$ ,  $-2x$ ,  $x$ ,  $\frac{1}{e^x - e^{-x}}$ ,

11 a)  $x = 5^{-10} \vee x = 25$ , b)  $x = -2 \vee \frac{1}{2}$

12 a) 125 og 243, b)  $x = 1$  og  $x = 0$ , c)  $8 \cdot 10^3$  og  $3.486784401 \cdot 10^9$ ,  
 d)  $-8 \cdot 10^3$  og  $\approx 2.868 \cdot 10^{-10}$

13 Omtrent 40 500kr (under antagelsen om at pengene står i fondet i ca. 55 år.

E1  $\sqrt[7]{\frac{3}{2}} - 1 \approx 6\%$

E2-3 Spør studass.