Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Oppfriskningskurs
Sommer 2018

Øving 3

Oppgave 9 fra Øving 2

a) Er funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{hvis } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{hvis } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

en-til-en? Hvorfor/hvorfor ikke?

b) Vis at funksjonen $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ er en-til-en. Finn inversfunksjonen f^{-1}.

2 La $p(x) = x^5((x-2)^2 + 2x - 5)^8$.

a) Hva er graden til polynomet $p(x)$?

b) Finn alle røttene til $p(x)$.

c) Faktoriser $p(x)$ så mye som mulig (dvs. som et produkt av lineære polynomer og kvadratiske polynomer uten røtter).

3 **a)** La $p = 21008$ og $d = 7$, finn heltall q, r slik at

$$\frac{p}{d} = q + \frac{r}{d}$$
$$r < d$$

b) La $p(x) = 21x^2 + 10x + 2$ og $d(x) = 7x + 1$, finn polynomer $q(x), r(x)$ slik at

$$\frac{p}{d} = q + \frac{r}{d}$$
$$\deg(r) < \deg(d)$$

hvor $\deg(p)$ er graden til et polynom.

4 Bruk polynomdivisjon på $p(x)/d(x)$, hvor $p(x) = x^5$ og $d(x) = x^2 - x + 1$. Etter at du har regnet det ut; sjekk at svaret er riktig ved å gange sammen og plusse sammen de relevante polynomene.

5 La $q(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$.

a) Vis at -1 og 1 er røtter til $q(x)$.

b) Faktoriser nå $q(x)$ så mye som mulig. (Hint: bruk polynomdivisjon på $\dfrac{q(x)}{x^2-1}$, og finn så røttene til resultatet du får. Hvor kommer nevneren fra?)

$\boxed{6}$ Finn alle løsninger av ligningene.

a) $2x^3 + 10x^2 + 12x = 0$

b) $8x^6 + 8x^4 - 2x^2 - 2 = 0$ (hint: substituer $u = 2x^2$)

c) $\frac{4}{1+x} + \frac{4}{1-x} = -1$

$\boxed{7}$ Løs følgende ligninger for x, ved å uttrykke x ved hjelp av konstanter, variabler og/eller tall.

a) $4\pi x \cdot 2y \cdot (1 - 4A) = 7$

b) $2yzx + 2(xy^2z)^2 - 4 = \pi C^2$

$\boxed{8}$ Bestem eventuelle asymptoter til funksjonene. Skissér deretter grafene sammen med asymptotene.

a) $f(x) = \dfrac{3x^2-2}{x^2-1}$

b) $g(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

$\boxed{9}$ Løs ulikhetene. (Hint: det kan være nyttige å skissere hver side av ulikheten i samme koordinatsystem for å se hvilket område ulikheten beskriver.)

a) $-x^2 > \pi$

b) $e^{(x-10)} < 5$

c) $\ln^2(x) > 1$

d) $\frac{1}{x} > x$

e) $\sqrt{(x-2)^2 + 8x} > 1$

f) $x^2 - 2x \leq 0$

g) $\frac{x}{2} \geq 1 + \frac{4}{x}$

h) $3^x \geq 3$

$\boxed{10}$ Forenkle uttrykkene så mye som mulig.

a) $(x^{-3})^{-2}$

b) $\log_5 125$

c) $\log_{1/3} 3^{2x}$

d) $10^{-\log_{10}\frac{1}{x}}$

e) $\frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}-e^{-2x}}$

11 Finn alle løsninger av ligningene.

a) $(\log_5 x)^2 = 20 - 4\log_5(x^2)$

b) $\log_4(x+4) - 2\log_4(x+1) = \frac{1}{2}$

12 Betrakt funksjonene $f(x) = x^3$ og $g(x) = 3^x$.

a) Beregn $f(5)$ og $g(5)$.

b) Løs ligningene $f(x) = 1$ og $g(x) = 1$.

c) Skriv $f(20)$ og $g(20)$ på standardform.

d) Skriv $f(-20)$ og $g(-20)$ på standardform.

e) Skisser de to funksjonene svært omtrentlig og merk deg hvor forskjellige de er.

13 Fornuftige Jonas har bestemt seg for å avsette alle konfirmasjonspengene sine til pensjonssparing. Han har en drøm om å bli millionær på pensjonspengene sine, og leve et liv i sus og dus på Granca. Hvis vi antar at Jonas vil få 6% rente på pensjonsfondet sitt, hvor mye må han minst klare å skrape sammen til konfirmasjonen sin for at pengene skal vokse over 1 000 000 kr innen han pensjonerer seg som 70-åring?

Ekstraoppgave 1 Reidun fikk 20 000 kr til konfirmasjonen. Disse pengene har stått på fastrente-konto i 7 år. Nå er de blitt til 30 000 kr. Hvor god rente fikk Reidun av banken?

Ekstraoppgave 2 De såkalte *hyperbolske funksjonene* er definert som følger:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad \text{(sinus hyperbolicus)}$$
$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \text{(cosinus hyperbolicus)}$$

Vis at de hyperbolske funksjonene tilfredsstiller følgende identiteter.

a) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$

b) $\cosh(-x) = \cosh(x)$

c) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

d) $\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$

Ekstraoppgave 3 Vi skal nå bevise *abc*-formelen. Nemlig at

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{har løsning(ene)} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

såfremt $b^2 - 4ac \geq 0$. Vi gjør det stegvis.

a) Vis første kvadratsetning,

$$(x + D)^2 = x^2 + 2Dx + D^2$$

for alle tall x og D.

b) Bruk første kvadratsetning til å vise at

$$x^2 + \frac{b}{a}x = (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}.$$

c) Ta nå utgangspunkt i $ax^2 + bx + c = 0$ og vis (ved å bruke **b)**) at

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Hva må vi kreve om konstanten a for å få lov til å dele på den over alt?

d) Vis med dette at

$$|x + \frac{b}{2a}| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|}.$$

e) Ved å løse opp absoluttverditegnet på venstre side får vi

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|},$$

hvorfor kan vi nå ta bort absoluttverditegnet rundt 2a?

f) Vis nå *abc*-formelen.

Fasit (med forbehold om feil)

2 **a)** 21, **b)** 0, $1 \pm \sqrt{2}$, **c)** $x^5(x - 1 - \sqrt{2})^8(x - 1 + \sqrt{2})^8$

3 $3001 + \frac{1}{7}, \quad 3x + 1 + \frac{1}{7x + 1}$

4 $x^3 + x^2 - 1 + \frac{1 - x}{x^2 - x + 1}$

$\boxed{5}$ **b)** $(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$

$\boxed{6}$ **a)** $0, -2-3,$ **b)** $\pm\frac{1}{\sqrt{2}},$ **c)**± 3

$\boxed{7}$ **a)** $x = \frac{7}{8\pi(1-4A)y},$ **b)** $x = \frac{-yz \pm \sqrt{y^2z^2(2(\pi c^2+4)y^2+1)}}{2y^4z^2}$

$\boxed{8}$ **a)** $y = 3$ (horisontal) $x = \pm 1$ (vertikale), **b)** $y = x$ (skrå) (ingen vertikale)

$\boxed{9}$ **a)** ingen løsning, **b)** $x < 10 + \ln 5,$ **c)** $0 < x < \frac{1}{e} \ \vee \ x > e,$
d) $0 < x < 1 \ \vee \ x < -1,$ **e)** $x > -1 \vee \ x < -3,$ **f)** $0 \leq x \leq 2,$
g) $x \geq 4 \ \vee \ -2 \leq x < 0,$ **h)** $x \geq 1$

$\boxed{10}$ $x^6,$ $3,$ $-2x,$ $x,$ $\frac{1}{e^x - e^{-x}},$

$\boxed{11}$ **a)** $x = 5^{-10} \ \vee \ x = 25,$ **b)** $x = -2 \ \vee \ \frac{1}{2}$

$\boxed{12}$ **a)** 125 og 243, **b)** $x = 1$ og $x = 0,$ **c)** $8 \cdot 10^3$ og $3.486784401 \cdot 10^9,$
d) $-8 \cdot 10^3$ og $\approx 2.868 \cdot 10^{-10}$

$\boxed{13}$ Omtrent 38 000kr

$\boxed{\text{E1}}$ $\sqrt[7]{\frac{3}{2}} - 1 \approx 6\%$

$\boxed{\text{E2-3}}$ Spør studass.