Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Oppfriskningskurs Sommer 2018

Øving 1

1 Ranger de følgende tallene i stigende rekkefølge (uten bruk av kalkulator). Spesifiser om noen av dem er like.

i) $3/4$

ii) $4/7$

iii) $\frac{3}{7} \cdot \frac{9}{11}$

iv) $\frac{9}{16} \cdot \frac{4}{3}$

2 Forenkle uttrykkene så mye som mulig. Oppgi svarene som eksaktverdier, ikke desimaltall.

a) $\frac{3}{11} \Big/ \frac{8}{24}$

b) $\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{\frac{24}{2}}{8}}$

c) $\sqrt{27}$

d) $\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}$

3 Bestem hvilke av de følgende uttrykkene som er ekvivalente (betyr det samme).

$$x \in [2, 5] \tag{1}$$
$$x \in (-\infty, 10) \tag{2}$$
$$x \in (2, 7] \tag{3}$$
$$x < 10 \tag{4}$$
$$x \leq 10 \tag{5}$$
$$2 < x \leq 7 \tag{6}$$
$$2 < x < 5 \tag{7}$$
$$x \in [2, 4) \cup (3, 5] \tag{8}$$
$$x \in (-\infty, 5) \cap (2, \infty) \tag{9}$$

Symbolet $\cap$ kalles *snitt* ("opp-ned" av union $\cup$), og $A \cap B$ består av alle tall som tilhørerer *både* A *og* B.

(Hint: Det er 4 par.) Det kan være lurte å skissere uttrykkene på tallinja. Spør studassen om det er riktig.

4 Løs ligningene.

a) $\frac{x+2}{3x-1} = \frac{3}{2}$

b) $|x| = x$

5 Løs ulikhetene.

a) $|3x - 10| < 5$

b) $5x - 3 \leq 7 - 3x$

c) $\frac{2x+1}{x} \geq 2$

6 Bruk implikasjons- og ekvivalenspiler på følgende utsagn.

i) Kåre bor på Svartlamoen.

ii) Kåre bor i Trondheim.

iii) Kåre bor i samme by som NTH ble opprettet.

iv) Kåre bor i Norge.

7 Bruk implikasjons- og ekvivalenspiler på følgende utsagn.

i) $x = 4$

ii) $x^2 = 16$

iii) $x = \pm 4$

iv) $|x| = 4$

v) $x = -4$

8 **a)** En rett linje er gitt ved ligningen $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 2$. Bestem hvor den krysser x- og y-aksen, og regn ut avstanden mellom disse to punktene. Finn så stigningstallet.

b) Finn skjæringspunktet mellom linjene $2x + y = 8$ og $5x - 7y = 1$.

9 De siste dagene har Lisa sett at temperaturen i vannet stiger jevnt med 0.4 grader for hver dag. På søndag er det 16.5 grader i vannet, men siden hun ikke liker kulde vil ikke Lisa bade før det er minst 19 grader. På hvilken dag kan Lisa først ta seg et bad?

10 **a)** Amund har høns og kyr på gården sin. Vrang av vane vil han ikke si hvor mange dyr han har, men opplyser heller at de har 382 bein og 141 hoder. Hvor mange høns og hvor mange kyr har Amund?

b) Neste år har bestanden endret seg, og Amund blitt enda mer vrang. Han opplyser nå at det er 196 vinger, 416 bein og 155 hoder på gården. Skriv opp ligninger for vinger, hoder og bein på gården når x, y og z betegner antallet høns, kyr og mennesker.

11 Skissér grafene til følgende uttrykk i planet ($\mathbb{R}^2$). Beskriv grafene med ord.

a) $x^2 + y^2 > 1$

b) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{2} = 1$

c) $x^2 + y^2 - 2x - y + 1 = 0$

d) $x^2 + y^2 \leq 2y$

12 Skissér området i planet som består av alle par (x, y) som tilfredsstiller de tre betingelsene:

$$x \in \mathbb{R} \tag{1}$$
$$y < x^2 - 4 \tag{2}$$
$$y \geq -(x+1)^2 + 1 \tag{3}$$

Følgende oppgaver er litt mer utfordrende; for de som vil ha noe ekstra å bryne seg på.

Ekstraoppgave 1

a) Finn **alle** tall x, y og z som tilfredsstiller ligningssystemet:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 8 \\ xyz &= 15 \\ x + y &= 4 \end{aligned}$$

b) Lag en ny utregning hvor du bruker $\Leftarrow$, $\Rightarrow$, og $\Leftrightarrow$ i utregningen for å vise at du får alle løsningene, og at alle løsningene faktisk fungerer.

Ekstraoppgave 2

Vis at ulikheten

$$|a - b| \geq ||a| - |b||$$

holder for alle relle tall a og b. (Hint: Trekantulikheten.)

Ekstraoppgave 3 Vis at ulikheten

$$\sqrt{a^2+b^2} \leq |a| + |b|$$

holder for alle relle tall a og b. (Hint: Kvadrer begge sider først.)

Fasit (med forbehold om feil)

1 $iii) < ii) < i) = iv)$

2 $\frac{9}{11}, \quad 5, \quad 3\sqrt{3}, \quad 6$

3 $(1) \iff (8), \quad (2) \iff (4), \quad (3) \iff (6), \quad (7) \iff (9)$

4 $x = 1, \quad x \geq 0$

5 $\frac{5}{3} < x < 5, \quad x \leq \frac{5}{4}, \quad x > 0$

6 $i) \implies ii) \iff iii) \implies iv)$

7 $i) \implies ii) \iff iii) \iff iv) \impliedby v)$

8 $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \left(0, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right), \quad 2\sqrt{\frac{5}{6}}$

9 Neste søndag.

10 91 høns og 50 kyr. $\quad 2x = 196, \quad 2x + 4y + 2z = 416, \quad x + y + z = 155.$

11 **a)** Utsiden av enhetssirkelen, **b)** Ellipse med sentrum i $(3, -2)$ og halvakser 3 og $\sqrt{2}$, **c)** Sirkelen med sentrum i $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ og radius $\frac{1}{2}$, **d)** Den lukka disken med sentrum i $(0, 1)$ og radius 1.

12 Området som ligger "utenfor" begge parablene $y = x^2 - 4$ og $y = -(x+1)^2 + 1$, og som i tillegg *ikke* ligger på førstnevnte.

E1 $x = \frac{3}{2},\ y = \frac{5}{2},\ z = 4 \quad$ og $\quad x = \frac{2}{5},\ y = \frac{3}{2},\ z = 4.$

E2-3 Spør studass.