OPPFRISK 2018

AVSLUTNINGSPRØVE – LF

1

1) $B = 3T$

2) $T = S - 11 = \frac{3}{2}T - 11 \Rightarrow \frac{1}{2}T = 11 \Rightarrow \underline{T = 22}$

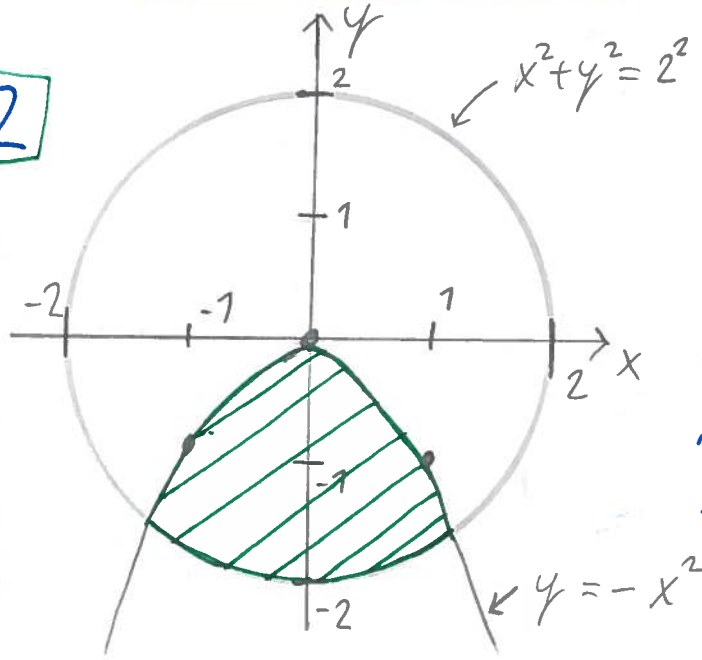
3) $S = B/2 = \frac{3}{2}T = \frac{3}{2} \cdot 22 = \underline{33}$

$\Downarrow$

$\underline{B = 66}$

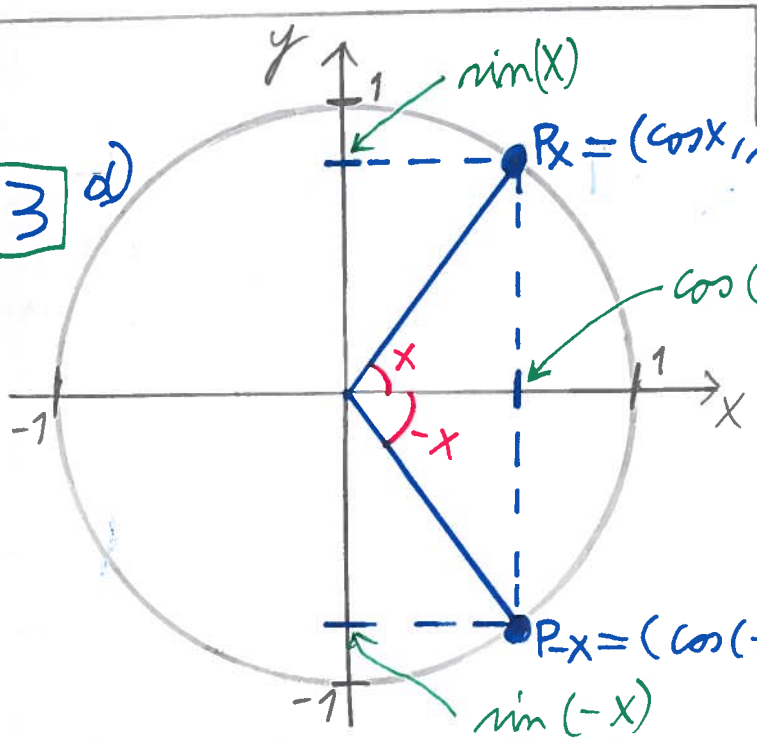
Svar: Steinar, Bjarte og Tore er hhv. 33, 66 og 22 år gamle.

2



Området det spørres etter er det avgrensede området som ligger innenfor sirkelen sentrert i origo med radius 2, samt "under" parabelen $y=-x^2$ (Siden det er "$\leq$" i ulikhetene skal vi også ha med de punktene som ligger på selve kurvene)

3 d)



$-x$ radianer betyr å gå halvsirkelbue x i negativt retning (fra $(1,0)$). Grunnet symmetrien til enhetssirkelen har punktet her, P_{-x}, samme x-koordinat

som for x. Dvs. at $\cos(x) = \cos(-x)$. Av samme grunn vil dine funksjoner ha samme y-koordinat i absoluttverdi, men med motsatt fortegn (siden vi speiler på x-aksen. Dvs. at $\sin(-x) = -\sin(x)$.

b) $$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

$\Rightarrow \tan(x)$ er odde.

(Vi kan også merke oss at definisjonsmengden til $\tan x$, $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, er symmetrisk om $x = 0$.)

4 a) $x^3 + 4x^2 - 3x - 18 : x - 2 = x^2 + 6x + 9$

$-(x^3 - 2x^2)$

$6x^2 - 3x - 18$

$-(6x^2 - 12x)$

$9x - 18$

$-(9x - 18)$

0

$\Downarrow$

$f(x) = (x^2 + 6x + 9)(x - 2)$

b) Siden $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ er vi at nullpunktene til $f(x)$ er $\underline{2}$ og $\underline{-3}$ (dobbelt nullpunkt).

5 $3 = \sqrt{9} = 9^{1/2} \Rightarrow 3^{\log_9 4} = \left(9^{1/2}\right)^{\log_9 4} = 9^{\frac{1}{2}\log_9 4}$ (3)

$= 9^{\log_9 4^{1/2}} = 4^{1/2} = \underline{\underline{2}}$

6 a) $(x+1)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \vee \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

$\Downarrow$

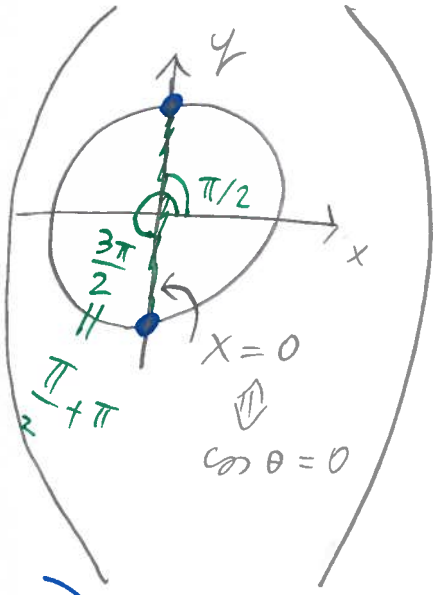
$\underline{\underline{x = -1}}$

$\Downarrow$

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Downarrow$

$\underline{\underline{x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}}$



b) Løsningene er $\ldots, -5\pi, -3\pi, -\pi, -1, \pi, 3\pi, \ldots$

$\approx -15.7 \quad \approx -9.4 \quad \approx -3.14$

så de løsningene som ligger i det åpne intervallet $(-10, -1)$ er $\underline{\underline{-3\pi \text{ og } -\pi}}$

7

Grunnsteget: $1^2 = 1$ og $\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{2\cdot 3}{6} = 1$ ✓

Induksjonshypotesen: Anta nå at $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 \overset{IH}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Induktionssteget:

$$\left[1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2\right]+(k+1)^2 \overset{\text{IH}}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)\left(k(2k+1)+6(k+\right.}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left((k+1)+1\right)\left(2(k+1)+1\right)}{6}$$ som är lika

högerledet innan $n=k+1$.

Q.E.D.