Oppfriskningskurs i matematikk – Dag 4

Petter Nyland

Institutt for matematiske fag

NTNU

Torsdag 8. august 2018

Beskjeder

- Prøve i morgen 09:15–10:45. (**Obligatorisk oppmøte**)
- Gruppe 1–9 i F1, og gruppe 10–15 her i EL5.
- Møt i god tid!

- Still med *egne* ark og skrivesaker.
- Ingen tillatte hjelpemidler; ikke engang kalkulator.
- Prøv ditt beste, men ikke stress.

- Skriv gruppenummer (og evt. navn) på besvarelsen.
- Kan hentes ferdig rettet f.o.m. 20. august i øvingsboksene utenfor Matteland (se websiden for veibeskrivelse).

- Gjennomgang av løsningsforslag 11:15–12:00 i EL5.

Beskjeder

- Prøve i morgen 09:15–10:45. (**Obligatorisk oppmøte**)
- Gruppe 1–9 i F1, og gruppe 10–15 her i EL5.
- Møt i god tid!

- Still med *egne* ark og skrivesaker.
- Ingen tillatte hjelpemidler; ikke engang kalkulator.
- Prøv ditt beste, men ikke stress.

- Skriv gruppenummer (og evt. navn) på besvarelsen.
- Kan hentes ferdig rettet f.o.m. 20. august i øvingsboksene utenfor Matteland (se websiden for veibeskrivelse).

- Gjennomgang av løsningsforslag 11:15–12:00 i EL5.

Beskjeder

- Prøve i morgen 09:15–10:45. (**Obligatorisk oppmøte**)
- Gruppe 1–9 i F1, og gruppe 10–15 her i EL5.
- Møt i god tid!

- Still med *egne* ark og skrivesaker.
- Ingen tillatte hjelpemidler; ikke engang kalkulator.
- Prøv ditt beste, men ikke stress.

- Skriv gruppenummer (og evt. navn) på besvarelsen.
- Kan hentes ferdig rettet f.o.m. 20. august i øvingsboksene utenfor Matteland (se websiden for veibeskrivelse).

- Gjennomgang av løsningsforslag 11:15–12:00 i EL5.

Beskjeder

- Prøve i morgen 09:15–10:45. (**Obligatorisk oppmøte**)
- Gruppe 1–9 i F1, og gruppe 10–15 her i EL5.
- Møt i god tid!

- Still med *egne* ark og skrivesaker.
- Ingen tillatte hjelpemidler; ikke engang kalkulator.
- Prøv ditt beste, men ikke stress.

- Skriv gruppenummer (og evt. navn) på besvarelsen.
- Kan hentes ferdig rettet f.o.m. 20. august i øvingsboksene utenfor Matteland (se websiden for veibeskrivelse).

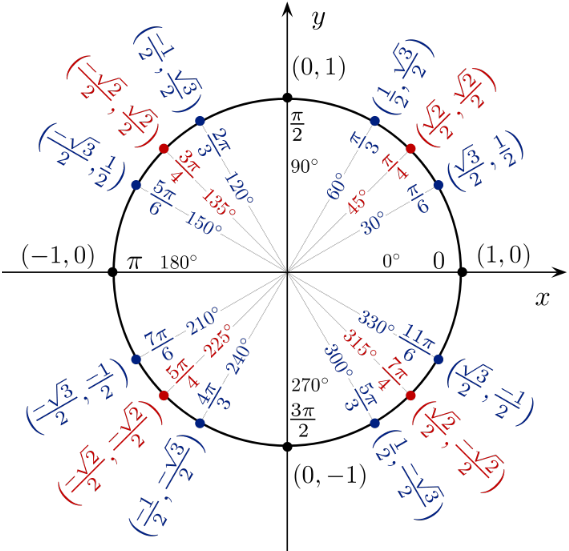
- Gjennomgang av løsningsforslag 11:15–12:00 i EL5.

Dagen i dag

- **Tema 6 – Trigonometri**: Sinus, cosinus, tangens, eksaktverdier, (usaklig mange) trigonometriske formler og trigonometriske ligninger.
- **Tema 7 – Logikk og bevis**: Induksjonsbevis og mer generelle matematiske bevis.

Enhetssirkelen

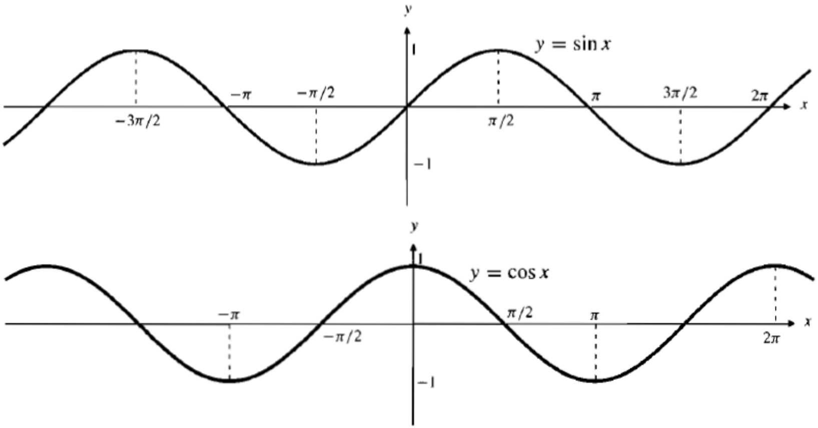
Litt bedre enn gårsdagens tegning... (Stjålet fra Wikipedia)



Utvalgte eksaktverdier

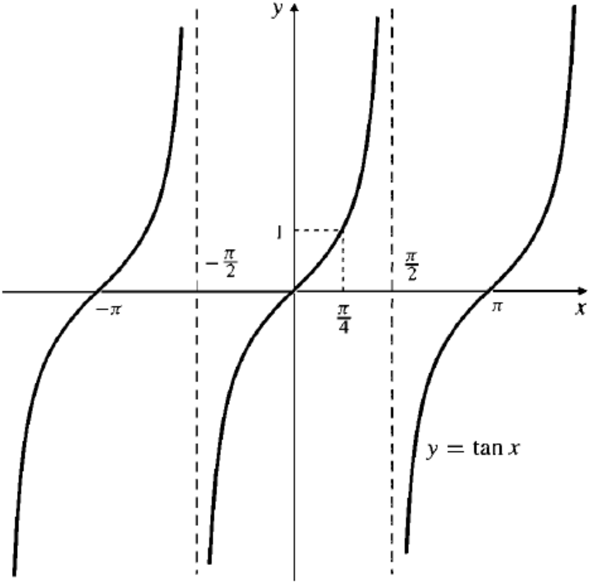
Angle θ				
Degrees	Radians	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	0	1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	undefined
180	π	0	-1	0
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	undefined
360	2π	0	1	0

Sinus og Cosinus



(Adams & Essex)

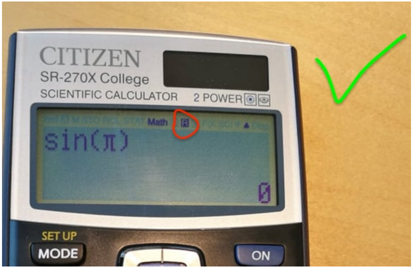
Tangens

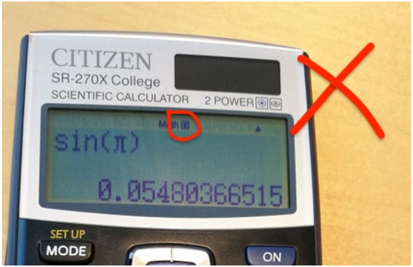


(Adams & Essex)

Kalkis

NB: Husk å stille inn kalkulatoren din på radianer, ikke grader.





Utvalgte trigonometriske formler 1

Den pytagoreiske identitet

$$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$$

$$\cos^2 u = 1 - \sin^2 u$$

$$\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$$

Addisjonsformlene

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$$

$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$$

Utvalgte trigonometriske formler 2

Doble vinkler

$$\begin{aligned}
\sin(2u) &= 2\sin u \cos u \\
\cos(2u) &= \cos^2 u - \sin^2 u \\
&= 2\cos^2 u - 1 \\
&= 1 - 2\sin^2 u
\end{aligned}$$

Halve vinkler

$$\begin{aligned}
\cos^2 u &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2u)) \\
\sin^2 u &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2u))
\end{aligned}$$

Utvalgte trigonometriske formler 3

Forskyvning

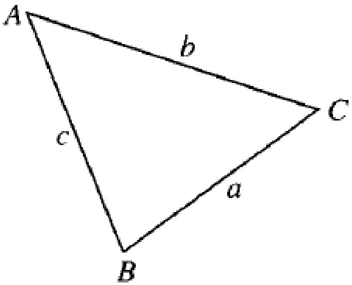
$$
\begin{aligned}
\sin(u \pm \frac{\pi}{2}) &= \pm \cos u \\
\cos(u \pm \frac{\pi}{2}) &= \mp \sin u \quad \text{(kvart periode)} \\
\sin(u \pm \pi) &= -\sin u \\
\cos(u \pm \pi) &= -\cos u \quad \text{(halv periode)}
\end{aligned}
$$

Utvalgte trigonometriske formler 4

Refleksjon

$$\sin(-u) = -\sin u \quad \text{(odde)}$$
$$\cos(-u) = \cos u \quad \text{(like)}$$
$$\tan(-u) = -\tan u \quad \text{(odde)}$$
$$\sin(\frac{\pi}{2} - u) = \cos u$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - u) = \sin u$$
$$\sin(\pi - u) = \sin u$$
$$\cos(\pi - u) = -\cos u$$

Utvalgte trigonometriske formler 5



Sinusregelen

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

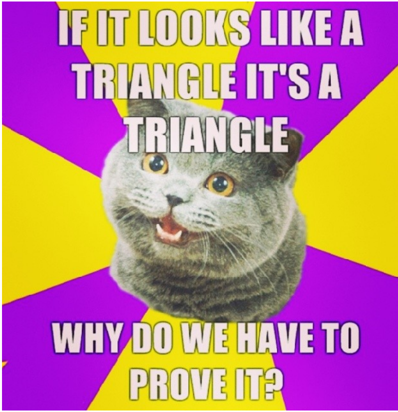
Cosinusregelen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

- NB: gjelder også ikke-rettvinklede trekanter

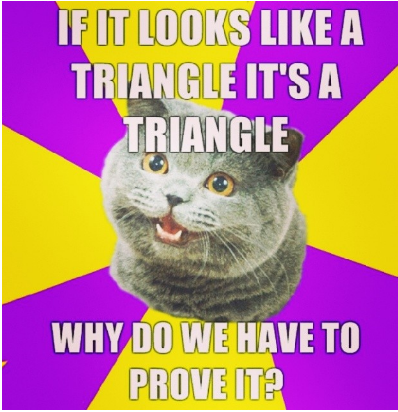
(Matematisk) Bevis

- “En logisk påvisning av sannheten til en påstand på grunnlag av en rekke argumenter “ (wtf? –Wikipedia)
- “Et 110% vanntett argument”
- Men ikke nødvendigvis 100% forståelig! (bevis $\neq$ forklaring)



(Matematisk) Bevis

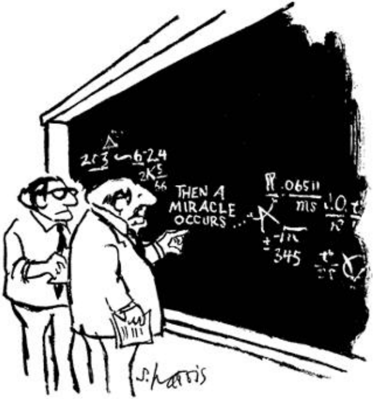
- "En logisk påvisning av sannheten til en påstand på grunnlag av en rekke argumenter " (wtf? –Wikipedia)
- "Et 110% vanntett argument"
- Men ikke nødvendigvis 100% forståelig! (bevis $\neq$ forklaring)



Bevis

- Benytter
  - tidligere beviste resultater
  - aksiomer (grunnsetninger)
  - logiske slutninger ($\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$)
  - omskrivninger og knep

  til å vise nye resultater.



"I think you should be more explicit here in step two."

Induksjonsbevis

- Kan brukes for å vise at en påstand $P(n)$ som avhenger av n er sann for alle naturlige tall n.

Oppskrift

1. **Grunnsteg:** Vis/sjekk at $P(1)$ er sann.
2. **Induksjonshypotese:** Anta at $P(n)$ er sann.
3. **Induksjonssteg:** Vis, ved å bruke induksjonshypotesen, at $P(n+1)$ må være sann.

Q.E.D.!

Bevisstrategier

Hovedsaklig 4 strategier for å vise at en påstand A medfører en annen påstand B $\quad (A \implies B)$

Direkte bevis

Anta at A er sann. Vis at da må B være sann.

Kontrapositivt bevis

Anta at B er usann. Vis at da må A være usann.

Selvmotsigelsesbevis

Anta at A er sann, men at B er usann. Utled fra dette en selvmotsigelse.
(Mer brukt for å vise at en enkelt påstand A er sann: Anta at A er usann, og utled fra dette en selvmotsigelse.)

- Også induksjonsbevis da

Bevisstrategier

Hovedsaklig 4 strategier for å vise at en påstand A medfører en annen påstand B $\quad (A \implies B)$

Direkte bevis

Anta at A er sann. Vis at da må B være sann.

Kontrapositivt bevis

Anta at B er usann. Vis at da må A være usann.

Selvmotsigelsesbevis

Anta at A er sann, men at B er usann. Utled fra dette en selvmotsigelse.
(Mer brukt for å vise at en enkelt påstand A er sann: Anta at A er usann, og utled fra dette en selvmotsigelse.)

- Også induksjonsbevis da

Bevisstrategier

Hovedsaklig 4 strategier for å vise at en påstand A medfører en annen påstand B $\quad (A \implies B)$

Direkte bevis

Anta at A er sann. Vis at da må B være sann.

Kontrapositivt bevis

Anta at B er usann. Vis at da må A være usann.

Selvmotsigelsesbevis

Anta at A er sann, men at B er usann. Utled fra dette en selvmotsigelse.
(Mer brukt for å vise at en enkelt påstand A er sann: Anta at A er usann, og utled fra dette en selvmotsigelse.)

- Også induksjonsbevis da

Bevisstrategier

Hovedsaklig 4 strategier for å vise at en påstand A medfører en annen påstand B $(A \implies B)$

Direkte bevis

Anta at A er sann. Vis at da må B være sann.

Kontrapositivt bevis

Anta at B er usann. Vis at da må A være usann.

Selvmotsigelsesbevis

Anta at A er sann, men at B er usann. Utled fra dette en selvmotsigelse.
(Mer brukt for å vise at en enkelt påstand A er sann: Anta at A er usann, og utled fra dette en selvmotsigelse.)

- Også induksjonsbevis da