

Oppfriskningskurs i matematikk – Dag 3

Petter Nyland

Institutt for matematiske fag



NTNU

Onsdag 8. august 2018

Dagen i dag

- **Tema 4 – Polynomer:** Faktorisering, røtter, polynomdivisjon, kvadratiske ligninger og rasjonale funksjoner.
- **Tema 3 – Funksjoner:** Funksjoner som er en-til-en, og inverse funksjoner. (Til overs fra i går.)
- **Tema 5 – Eksponentialer og logaritmer:** Potensregler, eksponentialfunksjoner og logaritmefunksjoner.

Polynomer

- Polynomer er de “enkleste” funksjonene
- Definert og kontinuerlig (grenseverdi = funksjonsverdi) på hele \mathbb{R}
- La $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_1 x + a_0$ være et polynom. Da gjelder:

$$n \text{ oddetall og } a_n > 0 \implies \lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = \pm\infty$$

$$n \text{ oddetall og } a_n < 0 \implies \lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = \mp\infty$$

$$n \text{ partall og } a_n > 0 \implies \lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = \infty$$

$$n \text{ partall og } a_n < 0 \implies \lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = -\infty$$

Faktorisering

Faktorteoremet

La $p(x)$ være et polynom. Et tall $r \in \mathbb{R}$ er en rot til $p(x)$ hvis og bare hvis $(x - r)$ er en faktor i $p(x)$.

- # røtter til et polynom \leq graden
- Polynomer av odde grad har alltid minst én (reell) rot
- Polynomer av partalls grad trenger ikke ha (reelle) røtter

- Ethvert heltall > 1 kan skrives på en essensielt unik måte som et produkt av primtall (*Aritmetikkens fundamentalteorem*).
- Analogt kan ethvert polynom av grad ≥ 1 skrives på en essensielt unik måte som et produkt av **lineære polynomer og kvadratiske polynomer uten røtter**. (Om vi tillater komplekse tall klarer vi oss med lineære polynomer; *Algebraens fundamentalteorem*).

Nyttige faktoreringsregler

$$x(ax + b) = ax^2 + bx \quad (\text{Felles faktor})$$

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \quad (\text{Første kvadratsetning})$$

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 \quad (\text{Andre kvadratsetning})$$

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2 \quad (\text{Konjugatsetningen})$$

$$(x - a)(x^2 + ax + a^2) = x^3 - a^3 \quad (\text{“Konjugatsetningen}^3\text{”})$$

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 \quad (\text{“Kubsetningen”})$$

Nyttige faktoriseringsregler

Binomialformelen

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k},$$

der $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ er binomialkoeffisienter (kan hentes fra rad $n + 1$ i *Pascals talltrekant*).

Exponent	Pascal's Triangle	Binomial Expansion
0	1	$(a+b)^0 = 1$
1	1 1	$(a+b)^1 = 1a + 1b$
2	1 2 1	$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
3	1 3 3 1	$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
4	1 4 6 4 1	$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
5	1 5 10 10 5 1	$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$
6	1 6 15 20 15 6 1	

Kvadratiske polynomer

- $(bx + c = 0 \implies x = -\frac{c}{b})$
- $ax^2 + c = 0 \implies x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (såfremt a og c har motsatt fortegn)

abc-formelen

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Kvadratiske polynomer

$$\left(\text{abc-formelen: } ax^2 + bx + c = 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

Faktorisere kvadratiske polynomer

La $p(x) = ax^2 + bx + c$.

- 1 Hvis $a = 1$, prøv inspeksjon: Finn $r, s \in \mathbb{R}$ slik at

$$r \cdot s = c \quad \text{og} \quad r + s = b$$

Da er $p(x) = x^2 + bx + c = (x + r)(x + s)$

- 2 Finn røttene med abc-formelen:

To røtter r_1, r_2 ($b^2 - 4ac > 0$) $\implies p(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$

Dobbel rot r ($b^2 - 4ac = 0$) $\implies p(x) = a(x - r)^2$

Ingen røtter ($b^2 - 4ac < 0$) $\implies p(x)$ kan ikke faktoriseres.

Fun fact

- Det finnes (grisestygge) formler à la *abc*-formelen (involverer $\sqrt[3]{x}$ og $\sqrt[4]{x}$) for tredje- og fjerdegradsligninger (søk opp “cubic/quartic equation”).
- Men *ingen* generell formel (med røtter) for femtegradsligninger eller høyere!
- Umuligheten av en slik formel ble *bevist* av den briljante norske matematikeren **Niels Henrik Abel** i 1826 (bare 23 år gammel!)



- **Abels** teorem (kalkulus—Matematikk 1 / Grunnkurs i analyse 1)
- **Abelsk** gruppe (abstrakt algebra)
- **Abelsummasjon** (tallteori)

Rasjonale funksjoner

Asymptoter

La $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ være en rasjonal funksjon, hvor $p(x)$ har grad m og $q(x)$ har grad n , og at disse ikke har noen felles røtter (kan strykes). Da har grafen til f :

- 1 En vertikal asymptote $x = r$ for hver rot r til $q(x)$ (deler på 0).
- 2 En horisontal asymptote $y = 0$ (x -aksen) hvis $m < n$.
- 3 En horisontal asymptote $y = L$ (med $L \neq 0$) hvis $m = n$.
 $L = \frac{a_n}{b_n}$ hvor a_n og b_n er koeffisientene foran x^n i $p(x)$ og $q(x)$.
- 4 En skrå asymptote $y = ax + b$ hvis $m = n + 1$. $ax + b$ er resultatet av polynomdivisjon av $p(x)$ med $q(x)$.
- 5 Ingen horisontal eller skrå asymptote hvis $m > n + 1$.

Alle disse asymptotene er tosidige.

- NB: det hender at funksjoner krysser sine asymptoter

Inverse funksjoner

For å vise at en funksjon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ikke er en-til-en

Finn to ulike (konkrete tall) $x_1, x_2 \in D$ som er slik at $f(x_1) = f(x_2)$.

For å vise at en funksjon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ er en-til-en

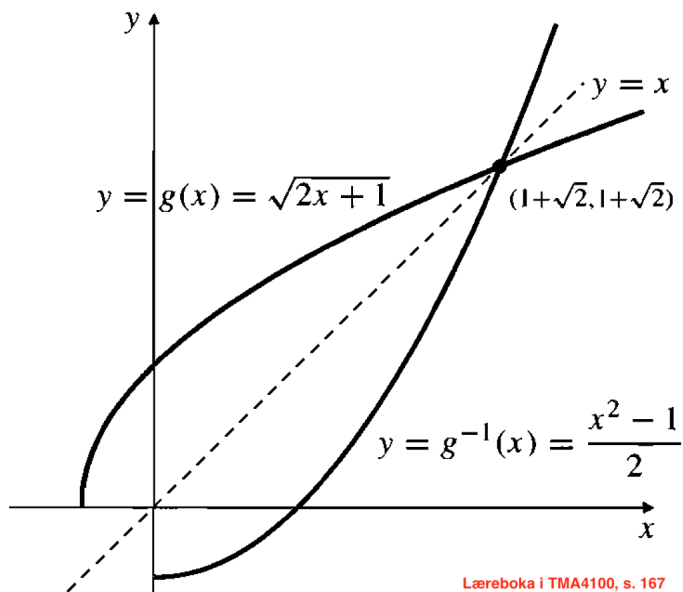
Anta at $x_1, x_2 \in D$ ("ukjente tall") er slik at $f(x_1) = f(x_2)$. Vis at da må $x_1 = x_2$.

Egenskaper til f^{-1}

Anta $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ er en-til-en. Da gjelder:

- $f^{-1}(f(x)) = x$ for alle $x \in D_f$
- $f(f^{-1}(y)) = y$ for alle $y \in V_f$
- f^{-1} er en-til-en og $(f^{-1})^{-1} = f$
- $V_{f^{-1}} = D_f$
- Får grafen til f^{-1} ved å speile grafen til f om linja $y = x$.

Inverse funksjoner



Potensregler / eksponentregler

La $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ med $a, b > 0$. Da gjelder:

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

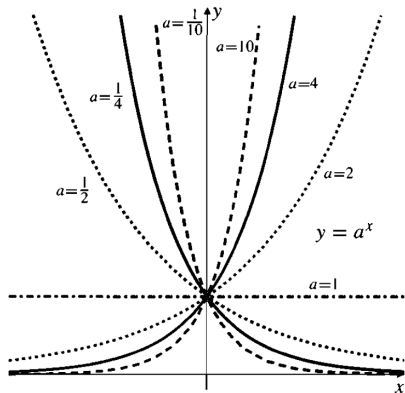
$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

Ekspontialfunksjoner



- For $a > 1$ har vi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

(x-aksen er venstre asymptote)

- For $0 < a < 1$ har vi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$$

(x-aksen er høyre asymptote)

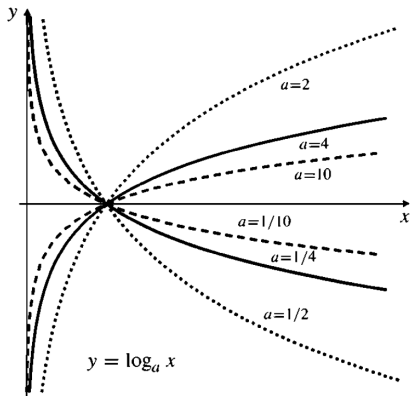
Ekspponentialer og logaritmer

- “The power of compound interest the most powerful force in the universe.”

Eksempel

Finanshaien Lars investerer hele sin formue på 1.2 millioner kroner i hedgefondet Sverre-Peter Group. Her får han en årlig avkastning på hele 9% (anta forenklet at den “ticker” én gang per år). Hvor mye vil Larsern være god for om 13 år?

Logaritmefunksjoner



- Grafen til $\log_a x$ er speilbildet til grafen til a^x om linja $y = x$.
- For $a > 1$ har vi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

- For $0 < a < 1$ har vi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} a^x = \infty$$

- y-aksen er vertikal asymptote

Logaritmeregler

La $a, b, x, y > 0$, med $a, b \neq 1$. Da gjelder:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a(a^x) = x$$

(Fun) fact

- Logaritmer ble oppfunnet av skotten John Napier omkring år 1600, og videreført av engelskmannen Henry Briggs.
- Forenklet mange beregninger (innen f. eks. navigasjon)
 - multiplikasjon \rightarrow addisjon
 - divisjon \rightarrow subtraksjon
- Logaritmetabeller var i bruk i norsk skole helt fram til 70-tallet (da tok lommeregneren over).

Eksempel

$$\begin{aligned}13004 \cdot 5321 &\approx 10^{4.1141} \cdot 10^{3.7260} = 10^{4.1141+3.7260} \\ &= 10^{7.8401} = 10^{0.8401} \cdot 10^7 \approx 6.9199 \cdot 10^7 \\ &= 69199000 \quad (14 \text{ desimaler i praksis})\end{aligned}$$



Ekspponentialer og logaritmer

Eksempel

Richters skala er en (noe utdatert) skala for å måle størrelsen til et jordskjelv. Dette er en såkalt *logaritmisk skala* med grunntall 10. Det vil si at for hvert nivå på skalaen tidobles skjelvets styrke. Et kjent jordskjelv i Cuzko i 1650 antas å ha hatt en styrke på 7.7, mens det største *målte* jordskjelvet noensinne forekom i Chile i 1960 og hadde en styrke på 9.5. Hvor mye sterkere var jordskjelvet i Chile enn det i Peru?

Ekspontialfunksjonen e^x og **den** naturlige logaritmen $\ln x$

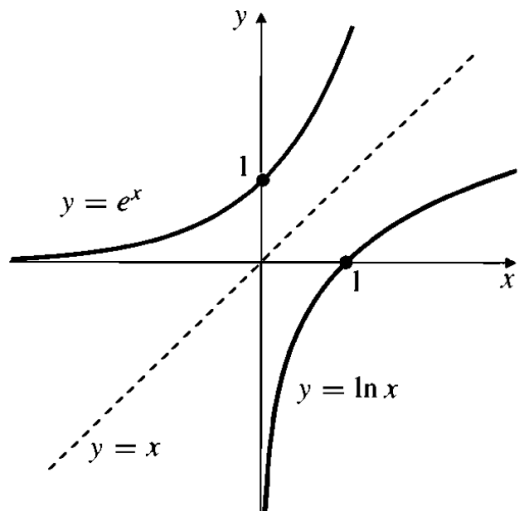


Figure 3.13 The graphs of e^x and $\ln x$

Substitusjonsligninger