Oppfriskningskurs i matematikk – Dag 3

Petter Nyland

Institutt for matematiske fag

NTNU

Onsdag 8. august 2018

Dagen i dag

- **Tema 4 – Polynomer**: Faktorisering, røtter, polynomdivisjon, kvadratiske ligninger og rasjonale funksjoner.
- **Tema 5 – Eksponentialer og logaritmer**: Potensregler, eksponentialfunksjoner og logaritmefunksjoner.

Polynomer

- Polynomer er de "enkleste" funksjonene
- Definert og kontinuerlig (grenseverdi = funksjonsverdi) på hele $\mathbb{R}$
- La $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \cdots + a_1 x + a_0$ være et polynom. Da gjelder:

$$
\begin{aligned}
n \text{ oddetall og } a_n > 0 &\implies \lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \pm\infty \\
n \text{ oddetall og } a_n < 0 &\implies \lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \mp\infty \\
n \text{ partall og } a_n > 0 &\implies \lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \infty \\
n \text{ partall og } a_n < 0 &\implies \lim_{x \to \pm\infty} p(x) = -\infty
\end{aligned}
$$

Polynomer

- Polynomer er de "enkleste" funksjonene
- Definert og kontinuerlig (grenseverdi = funksjonsverdi) på hele $\mathbb{R}$
- La $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \cdots + a_1 x + a_0$ være et polynom. Da gjelder:

$$\begin{aligned}
n \text{ oddetall og } a_n > 0 &\implies \lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty \\
n \text{ oddetall og } a_n < 0 &\implies \lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \mp\infty \\
n \text{ partall og } a_n > 0 &\implies \lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \infty \\
n \text{ partall og } a_n < 0 &\implies \lim_{x\to\pm\infty} p(x) = -\infty
\end{aligned}$$

Faktorisering

Faktorteoremet

La $p(x)$ være et polynom. Et tall $r \in \mathbb{R}$ er en rot til $p(x)$ hvis og bare hvis $(x - r)$ er en faktor i $p(x)$.

- $\#$ røtter til et polynom $\leq$ graden
- Polynomer av odde grad har alltid minst én (reell) rot
- Polynomer av partalls grad trenger ikke ha (reelle) røtter

- Ethvert heltall > 1 kan skrives på en essensielt unik måte som et produkt av primtall (*Aritmetikkens fundamentalteorem*).
- Analogt kan ethvert polynom av grad ≥ 1 skrives på en essensielt unik måte som et produkt av **lineære polynomer og kvadratiske polynomer uten røtter**. (Om vi tillater komplekse tall klarer vi oss med lineære polynomer; *Algebraens fundamentalteorem*).

Faktorisering

Faktorteoremet

La $p(x)$ være et polynom. Et tall $r \in \mathbb{R}$ er en rot til $p(x)$ hvis og bare hvis $(x - r)$ er en faktor i $p(x)$.

- # røtter til et polynom $\leq$ graden
- Polynomer av odde grad har alltid minst én (reell) rot
- Polynomer av partalls grad trenger ikke ha (reelle) røtter

- Ethvert heltall > 1 kan skrives på en essensielt unik måte som et produkt av primtall (*Aritmetikkens fundamentalteorem*).
- Analogt kan ethvert polynom av grad ≥ 1 skrives på en essensielt unik måte som et produkt av **lineære polynomer og kvadratiske polynomer uten røtter**. (Om vi tillater komplekse tall klarer vi oss med lineære polynomer; *Algebraens fundamentalteorem*).

Faktorisering

Faktorteoremet

La $p(x)$ være et polynom. Et tall $r \in \mathbb{R}$ er en rot til $p(x)$ hvis og bare hvis $(x - r)$ er en faktor i $p(x)$.

- $\#$ røtter til et polynom $\leq$ graden
- Polynomer av odde grad har alltid minst én (reell) rot
- Polynomer av partalls grad trenger ikke ha (reelle) røtter

- Ethvert heltall > 1 kan skrives på en essensielt unik måte som et produkt av primtall (*Aritmetikkens fundamentalteorem*).
- Analogt kan ethvert polynom av grad ≥ 1 skrives på en essensielt unik måte som et produkt av **lineære polynomer og kvadratiske polynomer uten røtter**. (Om vi tillater komplekse tall klarer vi oss med lineære polynomer; *Algebraens fundamentalteorem*).

Nyttige faktoriseringsregler

$$
\begin{aligned}
x(ax+b) &= ax^2 + bx \quad \textbf{(Felles faktor)} \\
(x+a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2 \quad \textbf{(Første kvadratsetning)} \\
(x-a)^2 &= a^2 - 2ax + a^2 \quad \textbf{(Andre kvadratsetning)} \\
(x+a)(x-a) &= x^2 - a^2 \quad \textbf{(Konjugatsetningen)} \\
(x-a)(x^2+ax+a^2) &= x^3 - a^3 \quad \textbf{(``Konjugatsetningen}^3\textbf{'')} \\
(x+a)^3 &= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 \quad \textbf{(``Kubesetningen'')}
\end{aligned}
$$

Nyttige faktoriseringsregler

Binomialformelen

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k},$$

der $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ er binomialkoeffisienter (kan hentes fra rad $n+1$ i *Pascals talltrekant*).

Exponent	Pascal's Triangle	Binomial Expansion
0	1	$(a+b)^0 = 1$
1	1 1	$(a+b)^1 = 1a + 1b$
2	1 2 1	$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
3	1 3 3 1	$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
4	1 4 6 4 1	$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
5	1 5 10 10 5 1	$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$
6		

https://www.onlinemathlearning.com/image-files/xpascals-triangle.png.pagespeed.ic.eIRPvnoxJR.webp

Kvadratiske polynomer

- $(bx + c = 0 \implies x = -\frac{c}{b})$
- $ax^2 + c = 0 \implies x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (såfremt a og c har motsatt fortegn)

abc-formelen

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Kvadratiske polynomer

$$\left(\text{abc-formelen:} \quad ax^2 + bx + c = 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

Faktorisere kvadratiske polynomer

La $p(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Hvis $a = 1$, prøv inspeksjon: Finn $r, s \in \mathbb{R}$ slik at

   $$r \cdot s = c \quad \text{og} \quad r + s = b$$

   Da er $p(x) = x^2 + bx + c = (x + r)(x + s)$

2. Finn røttene med abc-formelen:

   $$\begin{aligned} \text{To røtter } r_1, r_2 \ (b^2 - 4ac > 0) &\implies p(x) = a(x - r_1)(x - r_2) \\ \text{Dobbel rot } r \ (b^2 - 4ac = 0) &\implies p(x) = a(x - r)^2 \\ \text{Ingen røtter } (b^2 - 4ac < 0) &\implies p(x) \text{ kan ikke faktoriseres.} \end{aligned}$$

Fun fact

- Det finnes (grisestygge) formler à la *abc*-formelen (involverer $\sqrt[3]{x}$ og $\sqrt[4]{x}$) for tredje- og fjerdegradsligninger (søk opp "cubic/quartic equation").
- Men *ingen* generell formel (med røtter) for femtegradsligninger eller høyere!
- Umuligheten av en slik formel ble *bevist* av den briljante norske matematikeren **Niels Henrik Abel** i 1826 (bare 23 år gammel!)

- **Abels** teorem (kalkulus—Matematikk 1 / Grunnkurs i analyse 1)
- **Abelsk** gruppe (abstrakt algebra)
- **Abel**summasjon (tallteori)

Fun fact

- Det finnes (grisestygge) formler à la *abc*-formelen (involverer $\sqrt[3]{x}$ og $\sqrt[4]{x}$) for tredje- og fjerdegradsligninger (søk opp "cubic/quartic equation").
- Men *ingen* generell formel (med røtter) for femtegradsligninger eller høyere!
- Umuligheten av en slik formel ble *bevist* av den briljante norske matematikeren **Niels Henrik Abel** i 1826 (bare 23 år gammel!)

- **Abels** teorem (kalkulus—Matematikk 1 / Grunnkurs i analyse 1)
- **Abelsk** gruppe (abstrakt algebra)
- **Abel**summasjon (tallteori)

Rasjonale funksjoner

Asymptoter

La $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ være en rasjonal funksjon, hvor $p(x)$ har grad m og $q(x)$ har grad n, og at disse ikke har noen felles røtter (kan strykes). Da har grafen til f:

1. En vertikal asymptote $x = r$ for hver rot r til $q(x)$ (deler på 0).
2. En horisontal asymptote $y = 0$ (x-aksen) hvis $m < n$.
3. En horisontal asymptote $y = L$ (med $L \neq 0$) hvis $m = n$. $L = \frac{a_n}{b_n}$ hvor a_n og b_n er koeffisientene foran x^n i $p(x)$ og $q(x)$.
4. En skrå asymptote $y = ax + b$ hvis $m = n + 1$. $ax + b$ er resultatet av polynomdivisjon av $p(x)$ med $q(x)$.
5. Ingen horisontal eller skrå asymptote hvis $m > n + 1$.

Alle disse asymptotene er tosidige.

- NB: det hender at funksjoner krysser sine asymptoter

Rasjonale funksjoner

Asymptoter

La $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ være en rasjonal funksjon, hvor $p(x)$ har grad m og $q(x)$ har grad n, og at disse ikke har noen felles røtter (kan strykes). Da har grafen til f:

1. En vertikal asymptote $x = r$ for hver rot r til $q(x)$ (deler på 0).
2. En horisontal asymptote $y = 0$ (x-aksen) hvis $m < n$.
3. En horisontal asymptote $y = L$ (med $L \neq 0$) hvis $m = n$. $L = \frac{a_n}{b_n}$ hvor a_n og b_n er koeffisientene foran x^n i $p(x)$ og $q(x)$.
4. En skrå asymptote $y = ax + b$ hvis $m = n + 1$. $ax + b$ er resultatet av polynomdivisjon av $p(x)$ med $q(x)$.
5. Ingen horisontal eller skrå asymptote hvis $m > n + 1$.

Alle disse asymptotene er tosidige.

- NB: det hender at funksjoner krysser sine asymptoter

Potensregler

XXXXXX

Potensregler

XXXXXX