Oppfriskingskurs
Sommer 2014

Løsningsforslag til prøve

1 Fullfør tabellen. (Du skal altså kopiere tabellen, og sette kryss slik at tallet tilhører riktig sett. For eksempel $3 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.)

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
3	x	x	x	x
π				
-2				
$\sqrt{64}$				
$\frac{7}{2}$				
1,25				

Fasit:

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
3	x	x	x	x
π				x
-2		x	x	x
$\sqrt{64} = 8$	x	x	x	x
$\frac{7}{2}$			x	x
$1,25 = \frac{5}{4}$			x	x

2 Løs ulikhetene for x.

a) $\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$

b) $\frac{5}{2x+2} \geq \frac{2}{(x+1)^2}$

Løsningsforslag:
Del a).

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x-1} &< \frac{2}{x+1} \\
\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} &< 0 \qquad \text{trekker fra } \frac{2}{x+1} \text{ på begge sider} \\
\frac{3(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} &< 0 \qquad \text{setter på felles brøkstrek} \\
\frac{x+5}{(x-1)(x+1)} &< 0
\end{aligned}$$

(Ikke gang ut parentesene i nevneren!) Ved hjelp av fortegnsskjema får vi $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 1)$, eller $x < 5$ og $-1 < x < 1$.

Del b).

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{2x+2} &\geq \frac{2}{(x+1)^2} \\
\frac{5(x+1)^2}{2(x+1)} &\geq 2 \qquad \text{ganger begge sider med } (x+1)^2 \geq 0, \text{ og antar } x \neq -1 \\
\frac{5}{2}(x+1) &\geq 2 \qquad \text{stryker felles faktor} \\
x+1 &\geq 2 \cdot \frac{2}{5} \\
x &\geq \frac{4}{5} - 1 = -\frac{1}{5},
\end{aligned}
$$

eller $x \in [-\frac{1}{5}, \infty)$. Merk: $x = -1$ er ikke inneholdt i svaret dermed er vi på trygg grunn.

3 Skissér følgende implisitte uttrykk. Nevn også noen av egenskapene til figurene; nyttige ord kan være *sentrum*, *radius*, eller *halvakser*.

a) $(x-1)^2 + \frac{(y+1)^2}{4} = 4$

b) $x^2 + y^2 - 4x + 2y > 4$

Løsningsforslag:
Del a). Dette er ei ellipse med sentrum i $(1, -1)$ og halvakser $(2, 4)$. Se figur 1.

Del b). Ulikheten svarer til området *utenfor* en sirkel med sentrum i $(2, -1)$ med radius lik 3. Dette kan vises ved å fullføre kvadratet:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = (x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1.$$

Se figur 2.

4 Løs ligningssettet

$$
\begin{aligned}
2^5(x+5) &= 7y \\
-2\pi y - 5 &= x
\end{aligned}
$$

for (x, y).

Fasit: $(x, y) = (-5, 0)$.

5 Finn alle løsninger av ligningen

$$x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0.$$

(*Hint:* $x = 1$ løser ligningen.)

Løsningsforslag: La $P(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 1$. Fra hintet får vi at $P(1) = 0$, altså er $x = 1$ en rot av polynomet P. Da vet vi at $(x-1)$ er en faktor til P. Vi bruker polynomdivisjon for å forenkle problemet:

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 1}{x - 1} = x^2 + 4x + 1.$$

Dermed kan vi skrive ligningen som $0 = P(x) = (x-1)(x^2+4x+1)$, og vi trenger nå bare å løse andregradspolynomet $x^2 + 4x + 1$ lik 0. Ved hjelp av abc-formelen får vi

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}\sqrt{4-1}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Løsningene av ligningen (eventuelt røttene til P) er derfor $x = 1$, $x = -2 + \sqrt{3}$, og $x = -2 - \sqrt{3}$.

$\boxed{6}$ La $f(x) = x^2 \cos(2x)$.

a) Finn alle løsninger av ligningen $f(x) = 0$.

b) Skissér grafen til $f(x)$ for $x \in [-2\pi, 2\pi]$. (*Hint:* Husk at $\cos(x)$ er en like funksjon.)

Løsningsforslag:
Del a).

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^2 \cos(2x) &= 0 \end{aligned}$$

Enten er $x = 0$, eller så er $\cos(2x) = 0$:

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= 0 \\ 2x &= \frac{\pi}{2} + \pi n \qquad n \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n \qquad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Løsningene av ligningen er derfor $x = 0$, og $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n$ hvor $n \in \mathbb{Z}$.
EVENTUELT: Løsningene av ligningen er derfor $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, og $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$ hvor $n \in \mathbb{Z}$.

Del b). Se figur 3. Merk at $-x^2 \leq x^2 \cos(2x) \leq x^2$.

$\boxed{7}$ Bevis ved induksjon at

$$2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

gjelder for alle naturlige tall $n \geq 1$.

Løsningsforslag:

1. GRUNNSTEGET. Sjekker for $n = 1$. Venstre side gir $2^1 = 2$. Høyre side gir $2^{1+1} - 2 = 4 - 2 = 2$. Venstre side er lik høyre side. Grunnsteget stemmer.

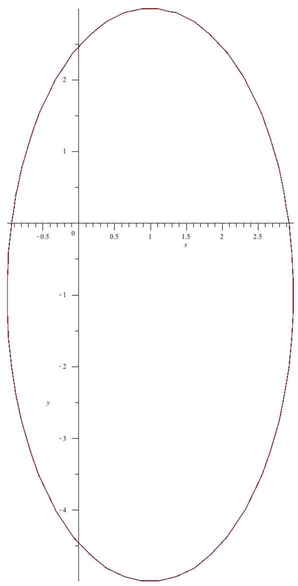
2. INDUKSJONSSTEGET. Vi antar nå at påstanden stemmer for $n = k$, dvs.,

$$2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{k-1} + 2^k = 2^{k+1} - 2. \tag{1}$$

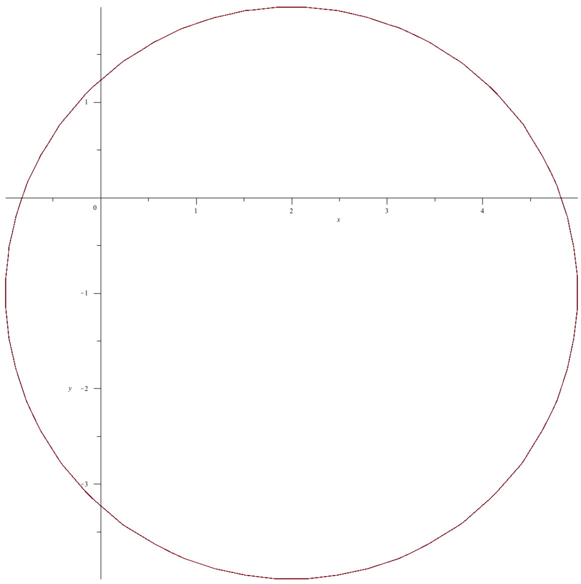
Ønsker så å vise påstanden for $n = k + 1$. Venstre side gir

$$\begin{aligned}
&2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{k-1} + 2^k + 2^{k+1} \\
&= \left(2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{k-1} + 2^k\right) + 2^{k+1} \\
&\overset{(1)}{=} \left(2^{k+1} - 2\right) + 2^{k+1} \\
&= 2 \cdot 2^{k+1} - 2 \\
&= 2^{(k+1)+1} - 2 \\
&= 2^{k+2} - 2.
\end{aligned}$$

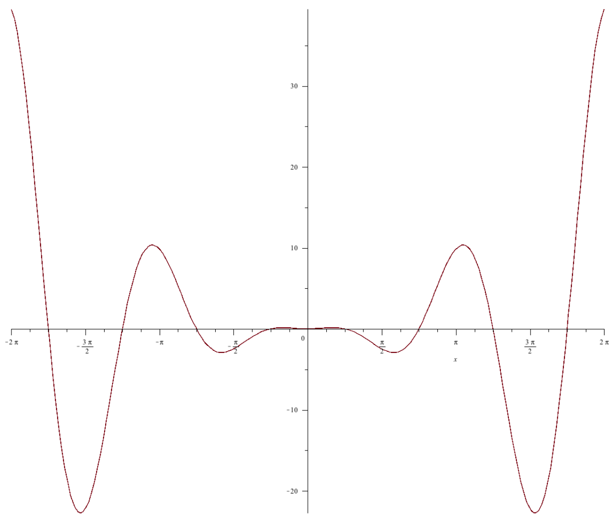
Høyre side gir $2^{(k+1)+1} - 2 = 2^{k+2} - 2$. Venstre side er lik høyre side. Induksjonssteget stemmer. Påstanden er dermed bevist.



Figur 1: Oppgave 3 a)



Figur 2: Oppgave 3 b)



Figur 3: Oppgave 6 b)