

Øving 5

Oppgave 1: Polynomdivisjon

a) La $p = 21008$ og $d = 7$, finn heltall q, r slik at

$$\frac{p}{d} = q + \frac{r}{d}$$
$$r < d$$

b) La $p(x) = 21x^2 + 10x + 2$ og $d(x) = 7x + 1$, finn polynomer $q(x), r(x)$ slik at

$$\frac{p}{d} = q + \frac{r}{d}$$
$$\deg(r) < \deg(d)$$

hvor $\deg(p)$ er graden til et polynom (størrelsen på den største x -potensen).

Oppgave 2: Polynomdivisjon igjen

Bruk polynomdivisjon på $p(x) = x^5$ og $d(x) = x^2 - x + 1$. Etter du har regnet det ut, sjekk at svaret er riktig ved å gange sammen og plusse sammen de relevante polynomene.

Oppgave 3: Faktorisering av polynomer og polynomdivisjon

$p(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$. Vi vet at hvis polynomet har røtter (også kalt nullpunkt eller løsninger) x_1, x_2, x_3 , og x_4 så vil faktoriseringen se ut slik: $p(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$.

a) Vis at -1 og 1 er røtter til polynomet $p(x)$.

b) Hvilken algoritme faktoriserer vekk deler av et polynom? Bruk denne algoritmen til å faktorisere $p(x) = q(x) \cdot (x^2 - 1)$

c) Finn alle røtter til polynomet $p(x)$.

Oppgave 4: Anvendelse av polynomdivisjon

Finn alle løsninger av ligningene.

a) $2x^3 + 10x^2 + 12x = 0$

b) $8x^6 + 8x^4 - 2x^2 - 2 = 0$ (Bruk substitusjon $u = 2x^2$)

c) Vis følgende likhet. Dette er ofte nyttig fordi høyre side er enklere å integrere.

$$\frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{x+3} = x^2 - x + 2 - \frac{8}{x+3}$$

Oppgave 5: Skisser og grafer

- a) Skisser funksjonene $f(x) = |x - 10|$, $g(x) = 3$. Bruk skissen til å løse ulikheten $|x - 10| \leq 3$.
- b) Skisser funksjonen $f(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{2x-3}$. Pass på at du ikke får en rett linje.
- c) Ligningen $e^x + x = 0$ kan ikke løses algebraisk (det vil si ved vanlig regning). Finn en omtrentelig verdi for løsningen ved tegning eller andre kreative metoder.

Oppgave 6: Skissebetraktning

Skisser funksjonen $\frac{x^2-x-6}{x+1}$. Det kan være til hjelp å gjøre polynomdivisjon først. Bruk dette til å bestemme

- a) Antallet nullpunkter.
- b) Hvor mange løsninger har ligningen $\frac{x^2-x-6}{x+1} = 1$?
- c) Finn tilnærmede verdier av funksjonen for $x = 100$ og $x = -1100$ uten å bruke kalkulator. Dette trenger kun å være et rimelig godt overslag.

Oppgave 7: Forenkling

Forenkle uttrykkene slik at x opptrer færrest mulig ganger.

a)

$$y = \frac{x}{x+1} \quad (1)$$

b)

$$y = \frac{\tan(x)}{\cos^2(x) - 1} \quad (2)$$

c)

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x} - e^{-2x}} \quad (3)$$

Oppsummering

Nå er det naturlig å gå tilbake til øvinger du ikke fikk gjort ferdig.

Ekstraoppgave: En formell logikk

Nå skal jeg beskrive en formell logikk, og gi deg teorem å bevise.

Aksiomer: dfah, tysl, dgel, ssss

Regneregler: (\rightarrow betyr 'kan byttes ut med') $a \rightarrow b$, $c \rightarrow d$, $f \rightarrow g$, $h \rightarrow l$, $s \rightarrow w$, $g \rightarrow s$, $s \rightarrow f$

Teorem: wfwf, dwbl

- a) Bevis de to teoremene.
- b) Kan du finne noen anvendelser av denne "matematikken"? (Hvilke/Hvorfor ikke?)

Fasit

De følgende oppgavene har løsningsforslag på fjordårets hjemmeside:

Oppgave 3: o2.3

Oppgave 4: o2.4

Oppgave 5: o3.2

Oppgave 6: o3.7

Oppgave 7c: $(e^x - e^{-x})^{-1}$