Øving 4

Oppgave 1: Forklar

Forklar hvorfor det er teit at vi skriver $\sin^{-1}(x)$ når vi mener $\arcsin(x)$ den inverse funksjonen til sinus.

Oppgave 2: Tegn grafen

Tegn grafen til sinus og cosinus med frihånd over to perioder (a.k.a. $x \in [0, 4\pi]$).

Oppgave 3: Tegn grafen igjen

a) Tegn grafen til $f(x) = 2\sin(x) + 1$ med frihånd.
b) Tegn grafen til $g(x) = |x + 2| \cdot \sin(x)$ med frihånd. Sjekk med et tegneprogram at grafen din ser nogenlunde ok ut.

Oppgave 4: Forklar

Forklar hva forskjellen er på $\arctan(x)$ og $\cot(x)$.

Oppgave 5: Trigonometriske identiter

Forenkle de følgende uttrykkene:
a) $\frac{\sin(x)\cos^2(x)+\sin^3(x)}{2\cos(x)}$
b) $\cos(\frac{3\pi}{4} - x) - \sin(x + \frac{\pi}{4})$

Oppgave 6: Trigonometriske annengradsligninger

a) Løs likningen $2\sin^2(x) + \sin(x) = 0$.
b) Løs likningen $\sin(x)\sin(2x)\cos(x) = \frac{1}{2}$

Oppgave 7: Enhetssirkel og polarkoordinater

Vi ser på likningen

$$x^2 + y^2 = 4$$

a) Tegn grafen. Hva slags figur er dette? Er dette en implisitt eller eksplisitt funksjon?
b) Hva kan gjøres (med definisjonsmengden/definisjonsområdet/domenet) til "funksjonen" for å gjøre det til en ekte (eksplisitt) funksjon? Skriv denne nye funksjonen som $y = f(x)$.

c) Hva kan gjøres med domenet til x og y (definisjonsmengden og verdimengden) for å gjøre dette til en inverterbar funksjon? Skriv denne nye funksjonen som $y = g(x)$.
d) Vi ser nå på likningen igjen. Bytt ut x med $r\cos(\theta)$ og bytt ut y med $r\sin(\theta)$. Dette kalles polarkoordinater. Forenkle uttrykket og skriv det som $r = h(\theta)$.
e) Tegn funksjonen $h(\theta)$ i polarkoordinater. Pass på at du får det samme som i a)!
f) Tegn funksjonen $h(\theta)$ i kartesiske koordinater.

Oppgave 8: Enhetssirkel

Det kan være vanskelig å huske om $\sin(x)' = \cos(x)$ eller $\sin(x)' = -\cos(x)$. Se på enhetssirkelen for $x = 0$ og avgjør
a) om verdien av $\sin(x)$ øker eller avtar når x vokser
b) fortegnet til $\cos(0)$
c) hvorvidt det burde være et minustegn i derivasjonsformelen

Oppgave 9: Kast

For et prosjektil som blir skutt ut med en bestemt vinkel fra bakkeplan over et plant underlag gjelder følgende to ligninger:
$x = t\cos\theta$
$y = t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$
Her representerer x og y henholdsvis tilbakelagt avstand målt langs bakken og den nåværende høyden til prosjektilet. t og θ representerer henholdsvis tiden som har gått siden utskytning og vinkelen prosjektilet ble skutt ut i. $\theta = \frac{\pi}{2}$ er altså rett oppover.

Prosjektilet vil altså lande når $y = 0$. Finn den verdien av θ som gir størst verdi for x. Dette kan gjøres både med og uten derivasjon. Vurder hvorvidt svaret ditt er rimelig.

Oppgave 10: Antall løsninger av triogonometriske funksjoner

Regn med radianer. Løs følgende ligninger for $\theta \in [0, 2\pi)$:
a) $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$
c) $\tan(\theta) = -1$

d) Tegn inn løsningensvinklene dine fra (a), (b) og (c) i en enhetssirkel. Kontroller at vinklene gir riktige x- og y-verdier og stigningstall.
e) Modifiser løsningene dine i (a), (b) og (c) slik at de gjelder for alle θ, ikke kun $\theta \in [0, 2\pi)$. Dette krever ingen regning.
f) Finn alle løsninger av $\sin(\frac{\theta}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Oppgave 11: Betydningen av den andre løsningen

Det kan virke meningsløst å finne flere løsninger av ligninger som dem i oppgave 1, men de har iblant en reell betydning. Ett enkelt eksempel følger her:

a) Si at kroppen din er slik at avstanden fra skulder til albue er 25 cm og fra albue til fingerspissene er 35 cm. Hvis du med strakt håndledd fører fingertuppene fra låret og opp mot armhulen, vil det hele tiden dannes ulike trekanter, siden vinkelen i ablueleddet varierer. Finn de to vinklene i ablueleddet som gjør at denne trekanten har areal 350 cm^2. Ikke vær redd for å se dum ut.

b) Bytt ut de faktisk målene i (a) med to variable, a og b. Prøv å finne et uttrykk for arealet. Sammenlign svaret ditt med sinussetning for areal: $A = \frac{ab}{2}\sin(\theta)$, hvor θ er vinkelen mellom to sider med lengde a og b.

Oppgave 12: Eksaktverdier av sinus, cosinus og tangens

Det finnes eksaktverdier for vinklene 0, 30, 45, 60 og 90 grader. Noen av verdiene resten av veien rundt enhetssirkelen er de samme, iblant med byttet fortegn.
a) Finn eksaktverdiene til sinus for alle vinkelene ovenfor.
b) Skriv om verdiene over til formen $\frac{\sqrt{a}}{2}$. Ser du et mønster?
c) Finn eksaktverdiene til cosinus for de samme vinklene. Akkurat det samme mønsteret går igjen.
d) Finn tan(60) ved å forkorte brøken for $\frac{\sin(60)}{\cos(60)}$.
e) Hvilke fortegn må du sette på om du vil ha sinus og cosinus til 225 grader?

Oppgave 13: Ulikheter med sinus og cosinus

Finn alle x hvor
a) $\cos(x) > 1$
b) $\tan(x) > 1$

Ekstraoppgave: Komplekse eksponensialfunksjoner

Vi har den veldig praktiske formlen $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Vi skal nå utlede denne formelen. Hvordan? Husk at

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x). \tag{1}$$

a) Vis at

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x)$$
$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin(x)$$

b) Bruk dette til å vise at

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x). \tag{2}$$

Fasit

De følgende oppgavene har løsningsforslag på fjordårets hjemmeside:
Oppgave 5: o3.3
Oppgave 6: o3.4
Oppgave 7: o3.5

Oppgave 8: o3.6
Oppgave 9: o3.8
Oppgave 10: o5.1
Oppgave 11: o5.2
Oppgave 12: o5.3