L.F. Øving 4
Oppfriskningskurs 2010

Oppgave 1

La $f(x) = 2x + \sin(x)$. Oppgaven ber oss vise at det finnes nøyaktig én x-verdi hvor $f(x) = 1$. Først finner vi $f'(x) = 2 + \cos(x)$ og observerer at denne finnes for alle x (så funksjonen er kontinuerlig og deriverbar). Så velger vi litt forskjellige x-verdier til vi finner en som gir $f(x) < 1$ og en annen som gir $f(x) > 1$. Vi tar her -10 og +10, slik at vi ser: $f(-10) < 1$ og $f(10) > 1$ ved å punche inn på kalkulatoren. Fordi $f(x)$ er kontnuerlig må den innom alle verdiene mellom $f(-10)$ og $f(10)$, blant annen 1. Altså har vi vist at $f(x) = 1$ ved minst én x-verdi.
Så legger v merke til at $f'(x) = 2 + \cos(x) \geq 2 + (-1) > 0$, slik at grafen alltid stiger ($f(x)$ øker alltid). Av dette kan vi konkludere at $f(x) = 1$ har maksimalt én løsning.
Totaltsett har vi da maksimalt én og minimalt én løsning, altså har vi nøyaktig én løsning.

Oppgave 2

$$\begin{aligned}
\int f(x) &= \frac{1}{3}x^3 \\
\int g(x) &= \ln(|x|) \\
\int h(x) &= \frac{2}{3}x^{3/2} \\
\int p(x) &= -\cos(x)
\end{aligned}$$

Oppgave 3

De to første er kontinuerlige, de to siste er diskontinuerlige. Dette fordi når du putter inn henholdsvis 0 og $\pi/2$ er de ikke definert.

Oppgave 4a

$$\int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{dx} = [\frac{1}{3}x^3]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-1)^3 = \frac{2}{3}.$$

Oppgave 4b

$$\int_{-1}^{1} \sin(x) \, \mathrm{dx} = [\cos(x)]_{-1}^{1} = \cos(1) - \cos(-1) = 0$$

Oppgave 4c

Denne funksjonen kan ikke integreres. For en forklaring se forelesningsvideo fra dag 4. Det er fordi funksjonen ikke er kontinuerlig i hele intervallet [-1,1] (funksjonen ikke definert i 0).

Oppgave 5a

Her går det ikke ann å integrere funksjonen fordi den ikke er definert i $x = 1$. Delbrøksoppspaltningen blir:

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3}(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}).$$

Oppgave 5b

Delbrøksoppspaltningen blir:

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{6}(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}).$$

Da blir integralet:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{x^2-9}\,\mathrm{dx} &= \int_1^2 \frac{1}{6}(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3})\,\mathrm{dx} \\
&= \frac{1}{6}[\ln(|x-3|) - \ln(|x+3|)]_1^2 \\
&= \frac{1}{6}(\ln(1) - \ln(5) - (\ln(2) - \ln(4))) \\
&= \frac{1}{6}(-\ln(5) - \ln(2) + 2\ln(2)) \\
&= \frac{1}{6}(-\ln(5) + \ln(2))
\end{aligned}$$

Oppgave 5c

Delbrøksoppspaltningen blir:

$$\frac{1}{(x+2)(x+\sqrt{2})} = \frac{1}{2-\sqrt{2}}(\frac{1}{x+\sqrt{2}} - \frac{1}{x+2}).$$

Da blir integralet:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{(x+2)(x+\sqrt{2})}\,\mathrm{dx} &= \int_1^2 \frac{1}{2-\sqrt{2}}(\frac{1}{x+\sqrt{2}} - \frac{1}{x+2})\,\mathrm{dx} \\
&= \frac{1}{2-\sqrt{2}}[\ln(|x+\sqrt{2}|) - \ln(|x+2|)]_1^2 \\
&= \frac{1}{2-\sqrt{2}}(\ln(2+\sqrt{2}) - \ln(4) - (\ln(1+\sqrt{2}) - \ln(3)))
\end{aligned}$$

Oppgave 6

a) $\int_{-3}^{4} x^{3/2}\,\mathrm{dx} =$ Kan ikke integreres! (Ikke definert for $x < 0$)

b) $\int_{1}^{2} x^{-0.7}\,\mathrm{dx} \approx 0.77$

c) $\int_{0}^{\pi} \sin(2x)\,\mathrm{dx} = 0$

d) $\int_{1}^{2} \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{dx} = \ln(\frac{5}{2})$

e) $\int_{2}^{3} x\sin(x)\,\mathrm{dx} = -\sin(2) + \sin(3) + 2\cos(2) - 3\cos(3)$

f) $\int_{a}^{b} x^2\,\mathrm{dx} = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$

g) $\int_{0}^{1} \frac{d}{dx}(\tan(\ln(x^2+1)))\,\mathrm{dx} = \tan(\ln(2)) - \tan(\ln(1)) = \tan(\ln(2))$

h) $\int_{1}^{2} \ln(x)\,\mathrm{dx} = \ln(4) - 1$

i) $\int_{-10}^{10} 2x^5 + x^3 + 4x\,\mathrm{dx} = 0$

j) $\int_{e}^{3} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{dx} = \ln(\ln(3))$

k) $\int_{0}^{\pi/2} e^x \sin(x)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}(1 + e^{\pi/2})$