

Del 9 av oppfriskningskurset i matematikk. Integrasjon

Haakon C. Bakka

Institutt for matematiske fag

9.-14 august 2010

Hva er forskjellen mellom integrasjon og antiderivasjon?

Definisjon antiderivasjon

Antiderivasjon gir deg den funksjonen du må derivere for å få den du startet med.

Den antideriverte av $f(x)$ er en $g(x)$ slik at $\frac{d}{dx}(g(x)) = f(x)$.

Noen antideriverte

Antideriverte av x^2 er $\frac{1}{3}x^3$

Antideriverte av e^x er e^x

Antideriverte av $\frac{1}{x^2}$ er $\frac{-1}{x}$

Definisjon av integrasjon

(En mer detaljert definisjon kommer i Matte 1)

Integralet av $f(x)$ (fra 0 til x) er arealet under grafen (fra 0 til x).

$$A(x) = \int_0^x f(\chi) d\chi$$

Integrasjon er ikke antiderivasjon alltid

Moteksempel

Hva er $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$?

Derfor må vi vite hvorfor integrasjon og antiderivasjon er det samme.

Kontinuerlige funksjoner

Kontinuerlig definisjon 1

En kontinuerlig funksjon er en du kan tegne uten å løfte hånden, grafen henger sammen hele veien.

Kontinuerlig definisjon 2

Hvis grenseverdien eksisterer i alle punkter og er lik grenseverdien i punktet så er funksjonen kontinuerlig.

Sagt med matematikk så er $f(x)$ kontinuerlig hvis:

For alle x så er $\lim_{h \rightarrow 0} f(x + h) = f(x)$

Teorem og bevis

Teorem

Hvis du har en kontinuerlig funksjon $f(x)$ så vil arealet under grafen $A(X) = \int_0^x f(x) dx$ være lik den antideriverte til $f(x)$. Det vil si at $\frac{dA}{dx} = f(x)$.

Bevis

Først en skisse, deretter gjør vi det skikkelig.

Notasjon

La oss bli enige om følgende notasjon:

Ubestemt integrasjon

La $\int f(x) dx = \int f dx = \int f$ være det ubestemte integralet av f , det vil si en antiderivert.

Merk

Antideriverte er bestemt opp til en konstant, så $\int x = \frac{1}{2}x^2 + C$ for en vilkårlig konstant C . Deriverer du en konstant får du 0 uansett hva konstanten er!

Utrenginger

Bestemt integrasjon

La $\int_a^b f(x) dx = [f]_a^b = f|_b - f|_a$. Hvor den vertikale streken betyr sett inn.

Eksempel

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 x^2 + 2 &= [f]_{-1}^3 = [\frac{1}{3}x^3 + 2x]_{-1}^3 \\ &= \frac{1}{3}3^3 + 2 \cdot 3 - \frac{1}{3}(-1)^3 - 2 \cdot (-1) = 9 + 6 + \frac{1}{3} + 2 = 17 + \frac{1}{3}.\end{aligned}$$