# Del 5 av oppfriskningskurset i matematikk. Grenseverdier

Haakon C. Bakka

Institutt for matematiske fag

9. august 2010

# Definisjon av grenseverdi

## Notasjon

I stedet for å si 'det som f(x) går mot når x går mot $x_0$' sier vi:
$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

## Definisjon 1

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$
når f(x) kommer så nærme du vil L hvis du lar x gå mot $x_0$.

## Definisjon 2

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$
hvis $|x - x_0|$ liten $\Rightarrow |f(x) - L|$ liten.

## Definisjon 3

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$
hvis $|x - x_0| \to 0 \Rightarrow |f(x) - L| \to 0$.

# Noen regler om grenseverdier

- $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to x_0} f(x)}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$
- $\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0$
- $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$

**Forsiktig**

Når du bruker disse reglene husk på at det er mange ting som ikke går ann (ikke er definert): $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$.

# Bevis av grenseverdier

## Egentlig skal man bevise grenseverdier...

Vis at $\lim_{x \to 4} x^2 = 16$

## ...men egentlig er vi litt for late til det.

Så vi har følgende tommelfingerregler:

- Putt inn $x_0$ og se om du får et veldefinert uttrykk.
- Hvis det ikke funka, prøv å faktorisere brøker og forenkle uttrykk.
- Hvis det ikke funka, på tide å bli kreativ!

# Eksempel

## Et par enkle oppgaver

Hva er $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x}{x+1}$ ?

Hva er $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ ?

Hva er $\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2-1}$ ?

Hva er $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1}$ ?

Hva er $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3+1}{3x^3+2x+1}$ ?

Videre eksempler ser vi i neste del: Derivasjon. Det er for å kunne derivere ting vi bryr oss om grenseverdier.