

Quillen-Suslin-teorem

Kilder: Serge Langs bok Algebra,
spesielt kapittel XXI

Teorem (Quillen-Suslin):

La K være en kropp. Da er alle
endelig genererte projektive moduler
over $K[x_1, \dots, x_r]$ frie.

Def:

La A være en ring. En A -modul
 E er stabilt fri om det finnes
en endelig generert fri modul F
slik at $E \oplus F$ er endelig generert
fri.

i.e.: Det finnes m, n slik at

$$E \oplus A^m \cong A^n.$$

Teorem 1 (Serre):

Alle endelig genererte projektive moduler over $K[x_1, \dots, x_n]$ er stabilt frie.

Merk:

For å bevise Quillen-Suslin-teoremet, holder det derfor å vise at alle stabilt frie moduler over $K[x_1, \dots, x_n]$ er frie.

Def:

La A være en kommutativ ring.

$(f_1, \dots, f_n) \in A^n$ er en enhetsmodular vektor (EMV) om

$$\langle f_1, \dots, f_n \rangle = A,$$

i.e. $\sum_{i=1}^n g_i f_i = 1$ for noen $g_i \in A$.

En enhetsmodular vektor $f = (f_1, \dots, f_n)$

1) Har en enhetsmodulær utvidelse (EMU)
om det finnes $M \in GL_n(A)$ der
 q^T er en kolonne i M .

Ringen A har EMU-egenskapen
om enhver EMU $q \in A^n$ har en EMU,
for alle n .

Teorem 2:

A har EMU-egenskapen hvis
og bare hvis alle stabilitt frie
 A -moduler er frie.

1) Bewis:

\Rightarrow :

Anta at A har EMU-egenskapen.

La E være en stabilitt fri modul.

La $m, n \in \mathbb{N}$ slik at $E \oplus A^m \cong A^n$.

Ved induksjon på m , er det nok

å vise at hvis $E \oplus A$ er fri, så er
 E fri.

Antag $E \oplus A \cong A^n$.

Velg en isomorfi

$$\phi: E \oplus A \xrightarrow{\cong} A^n$$

og la $i: A \rightarrow A^n$ være sammen-
setningen

$$A \hookrightarrow E \oplus A \xrightarrow{\phi} A^n.$$

i er gitt av en matrise

$$u_i = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix},$$

som er en EMV fordi i er en
splitt monomorfi.

Siden A har EMU-egenskapen,
finnes det $M \in GL_n(A)$ med

$$M = [u_1 u_2 \dots u_n], \quad u_i \in A^n.$$

u_1, \dots, u_n er lineært uavhengige,

og

$$A^n = \text{Col}(M)$$

$$= \text{Span}\{u_1, \dots, u_n\}$$

$$= \text{Span}\{u_1\} \oplus \text{Span}\{u_2, \dots, u_n\}$$

$$= \phi(A) \oplus \text{Span}\{u_2, \dots, u_n\}.$$

Vi har også

$$A^n = \phi(A) \oplus \phi(E),$$

så

$$E \cong \phi(E) \cong \frac{\phi(A) \oplus \phi(E)}{\phi(A)}$$

$$= \frac{\phi(A) \oplus \text{Span}\{u_2, \dots, u_n\}}{\phi(A)}$$

$$\cong \text{Span}\{u_2, \dots, u_n\}$$

$$\cong A^{n-1},$$

fordi u_2, \dots, u_n er lineært uafhængige.

Altså er E fri.

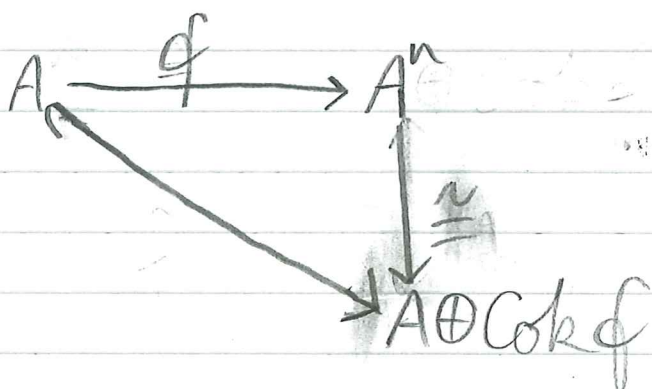
Antag at alle stabilt frie moduler er frie.

La $(f_1, \dots, f_n) \in A^n$ være en EMV.

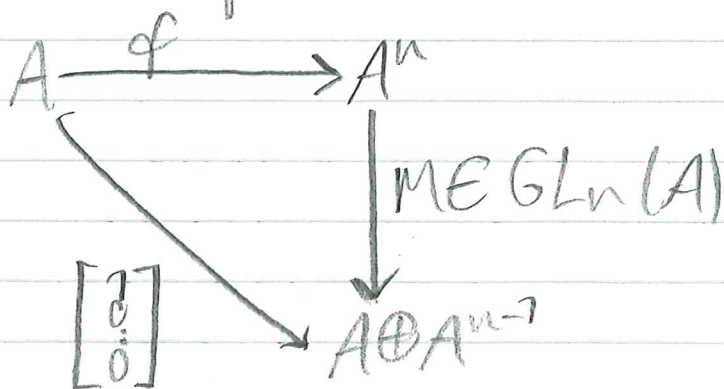
Da er

$$f: A \xrightarrow{\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}} A^n$$

en splitt-monomorfi, så vi har



Da er $\text{Cok } f$ stabilt fri og dermed fri, så $\text{Cok } f \cong A^{n-1}$.



Da er første kolonne i M^{-1} lik $\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$.

så (f_1, \dots, f_n) har en EMU. \square

Dermed er det nok å vise at $K[x_1, \dots, x_r]$ har EMU-egenskapen.

Teorem 13:

La A være et heltallsområde, og la $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in A[x]^n$ være en EMU, der minst en $f_i(x)$ har ledende koeffisient 1.

Da finnes det $M \in GL_n(A[x])$ slik at

$$\begin{aligned} f(x) &= M f(0). \\ &= (f_1(0), \dots, f_n(0)) \end{aligned}$$

Teorem 4 (Quillen-Suslin):

$K[x_1, \dots, x_r]$ har EMU-egenskapen.

B-evis:

Induksjon på r .

$r=1$:

$K[x]$ er PID, så alle projektive moduler er frie.

$r > 1$:

Anta at $A = K[x_1, \dots, x_{r-1}]$ har EMU-egenskapen.

La $f = (f_1, \dots, f_n) \in K[x_1, \dots, x_r]$ være en EMV.

Vi vil bruke teorem 3, men trenger da at at minst én

$$f_i(x_1, \dots, x_r) \in K[x_r]$$

har ledende x_r -koeffisient 1.

La $y_r := x_r$, og $y_i := x_i - x_r^{m_i}$ for $i \neq r$, der $m_i \geq 1$.

Da kan man vise at y_1, \dots, y_r er algebraisk uafhængige.

For $j=1, \dots, n$ har vi

$$d_j = \sum_{k=(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}_0^r} a_k x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}$$

for noen $a_k \in K$.

Sett inn $x_i = y_i + y_r^{m_i}$ for $i \neq r$:

$$\begin{aligned} d_j &= \sum_k a_k (y_1 + y_r^{m_1})^{k_1} \dots (y_{r-1} + y_r^{m_{r-1}})^{k_{r-1}} y_r^{k_r} \\ &= \sum_k a_k y_r^{m_1 k_1 + \dots + m_{r-1} k_{r-1} + k_r} + (\text{ledd med lavere } y_r\text{-grad}). \end{aligned}$$

Hvis vi velger m_1, \dots, m_{r-1} på en slik måte, så er $m_1 k_1 + \dots + m_{r-1} k_{r-1} + k_r$ entydig bestemt av k_1, \dots, k_r , og da vil ingen potenser av y_r (når $a_k \neq 0$) kansellere.

$(m_i = d^i, \text{ der } d \in \mathbb{N} \text{ med } d > k_1, \dots, k_r \text{ när } a_k \neq 0.)$

De blir ledande y_r -led i f_j på formen

$$a_k y_r^{m_k + \dots + m_{r-1} k_{r-1} + k_r},$$

med $a_k \neq 0$.

Hvis vi ganger med a_k^{-1} , får f_j de 1 som ledande y_r -koefficient.

Nå har

$$f(x_1, \dots, x_r) = g(y_1, \dots, y_r)$$

en komponent med ledande y_r -koefficient

1 som polynom över $K[y_1, \dots, y_{r-1}]$.

Ved teorem 3 finnes det

$$M \in GL_n((K[y_1, \dots, y_{r-1}])[y_r])$$

slik at

$$g(y_1, \dots, y_r) = M g(y_1, \dots, y_{r-1}, 0).$$

Da h er $g(y_1, \dots, y_{r-1}, 0)$ en EMV over $K[y_1, \dots, y_r]$:

$$\sum_{i=1}^n h_i(y_1, \dots, y_r) g_i(y_1, \dots, y_r) = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n h_i(y_1, \dots, y_{r-1}, 0) g_i(y_1, \dots, y_{r-1}, 0) = 1$$

Ved induktionsantagelsen har h en EMU over $K[y_1, \dots, y_{r-1}]$, så $g(y_1, \dots, y_r)$ har en EMU over $K[y_1, \dots, y_r]$. \square