Quillen-Suslin-teoremet

Kilder: Serge Langs bok *Algebra*, spesielt kapittel XXI

Teorem (Quillen-Suslin):

La K være en kropp. Da er alle endelig genererte projektive moduler over $K[x_1, \dots, x_r]$ frie.

Def:

La A være en ring. En A-modul E er **stabilt fri** om det finnes en endelig generert fri modul F slik at $E \oplus F$ er endelig generert fri.

I.e.: Det finnes m, n slik at

$$E \oplus A^m \cong A^n.$$

Teorem 1 (Serre):

Alle endelig genererte projektive moduler over $K[x_1,\dots,x_r]$ er stabilt frie.

Merk:

For å bevise Quillen-Suslin-teoremet, holder det derfor å vise at alle stabilt frie moduler over $K[x_1,\dots,x_r]$ er frie.

Def:

La A være en kommutativ ring. $(f_1,\dots,f_n)\in A^n$ er en enhetsmodulær vektor (EMV) om

$$\langle f_1,\dots,f_n\rangle = A,$$

i.e. $\sum_{i=1}^{n} g_i f_i = 1$ for noen $g_i \in A$.

En enhetsmodulær vektor $f=(f_1,\dots,f_n)$

har en **enhetsmodulær utvidelse** (EMU) om det finnes $M \in GL_n(A)$ der f^T er en kolonne i M.

Ringen A har **EMU-egenskapen** om enhver EMV $f \in A^n$ har en EMU, for alle n.

Teorem 2:

A har EMU-egenskapen hvis og bare hvis alle stabilt frie A-moduler er frie.

Bevis:

$\Rightarrow$:

Anta at A har EMU-egenskapen.

La E være en stabilt fri modul.

La $m, n \in \mathbb{N}$ slik at $E \oplus A^m \cong A^n$.

Ved induksjon på m, er det nok å vise at hvis $E \oplus A$ er fri, så er E fri.

Antar $E \oplus A \cong A^n$.

Velg en isomorfi

$\phi : E \oplus A \xrightarrow{\cong} A^n$,

og la $i : A \to A^n$ være sammensetningen

$A \hookrightarrow E \oplus A \xrightarrow{\phi} A^n$.

i er gitt av en matrise

$u_1 = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix}$,

som er en EMV fordi i er en splitt monomorfi.

Siden A har EMU-egenskapen, finnes det $M \in GL_n(A)$ med

$M = [u_1 u_2 \dots u_n]$, $u_i \in A^n$.

$u_1, \dots, u_n$ er lineært uavhengige, og

$$A^n = \mathrm{Col}(M)$$
$$= \mathrm{Span}\{u_1, \dots, u_n\}$$
$$= \mathrm{Span}\{u_1\} \oplus \mathrm{Span}\{u_2, \dots, u_n\}$$
$$= \phi(A) \oplus \mathrm{Span}\{u_2, \dots, u_n\}.$$

Vi har også

$$A^n = \phi(A) \oplus \phi(E),$$

så

$$E \cong \phi(E) \cong \frac{\phi(A) \oplus \phi(E)}{\phi(A)}$$
$$= \frac{\phi(A) \oplus \mathrm{Span}\{u_2, \dots, u_n\}}{\phi(A)}$$
$$\cong \mathrm{Span}\{u_2, \dots, u_n\}$$
$$\cong A^{n-1},$$

fordi $u_2, \dots, u_n$ er lineært uavhengige.

Altså er E fri.

$\Leftarrow$:

Anta at alle stabilt frie moduler er frie.

La $(f_1, \dots, f_n) \in A^n$ være en EMV.

Da er

$$f : A \xrightarrow{\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}} A^n$$

en splitt-monomorfi, så vi har

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & A^n \arrow[d, "\cong"] \\ & A \oplus \operatorname{Cok} f \end{tikzcd}$$

Da er $\operatorname{Cok} f$ stabilt fri og dermed fri, så $\operatorname{Cok} f \cong A^{n-1}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}"'] & A^n \arrow[d, "M \in GL_n(A)"] \\ & A \oplus A^{n-1} \end{tikzcd}$$

Da er første kolonne i M^{-1} lik $\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$, så $(f_1, \dots, f_n)$ har en EMU. $\square$

Dermed er det nok å vise at

$K[x_1, \dots, x_r]$ har EMU-egenskapen.

Teorem 13:

La A være et heltallsområde,

og la $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in A[x]^n$

være en EMV, der minst en $f_i(x)$

har ledende koeffisient 1.

Da finnes det $M \in GL_n(A[x])$

slik at

$$f(x) = M \underbrace{f(0)}_{= (f_1(0), \dots, f_n(0))}.$$

Teorem 4 (Quillen-Suslin):

$K[x_1, \dots, x_r]$ har EMU-egenskapen.

Bevis:

Induksjon på r.

$r=1$:

$K[x]$ er PID, så alle projektive moduler er frie.

$r>1$:

Anta at $A = K[x_1, \dots, x_{r-1}]$ har EMU-egenskapen.

La $f = (f_1, \dots, f_n) \in K[x_1, \dots, x_r]$ være en EMV.

Vi vil bruke teorem 3, men trenger da at at minst én

$f_i(x_1, \dots, x_r) \in R[x_r]$

har ledende x_r-koeffisient 1.

La $y_r := x_r$, og $y_i := x_i - x_r^{m_i}$ for $i \neq r$, der $m_i \geq 1$.

Da kan man vise at $y_1, \ldots, y_r$ er algebraisk uavhengige.

For $j = 1, \ldots, n$ har vi

$$q_j = \sum_{k=(k_1,\ldots,k_r)\in \mathbb{N}_0^r} a_k x_1^{k_1} \cdots x_r^{k_r}$$

for noen $a_k \in K$.

Sett inn $x_i = y_i + y_r^{m_i}$ for $i \neq r$:

$$q_j = \sum_k a_k (y_1 + y_r^{m_1})^{k_1} \cdots (y_{r-1} + y_r^{m_{r-1}})^{k_{r-1}} y_r^{k_r}$$

$$= \sum_k a_k y_r^{m_1 k_1 + \ldots + m_{r-1} k_{r-1} + k_r} + (\text{ledd med lavere } y_r\text{-grad}).$$

Hvis vi velger $m_1, \ldots, m_{r-1}$ på en lur måte, så er $m_1 k_1 + \ldots + m_{r-1} k_{r-1} + k_r$ entydig bestemt av $k_1, \ldots, k_r$, og da vil ingen potenser av y_r (når $a_k \neq 0$) kansellere.

($m_i = d^i$, der $d \in \mathbb{N}$ med

$d > k_1, \dots, k_r$ når $a_k \neq 0$.)

Da blir ledende y_r-ledd i f_j

på formen

$$a_k y_r^{m_1 k_1 + \dots + m_{r-1} k_{r-1} + k_r},$$

med $a_k \neq 0$.

Hvis vi ganger med a_k^{-1}, får f_j

da 1 som ledende y_r-koeffisient.

Nå har

$$f(x_1, \dots, x_r) = g(y_1, \dots, y_r)$$

en komponent med ledende y_r-koeffisient

1 som polynom over $K[y_1, \dots, y_{r-1}]$.

Ved teorem 3 finnes det

$$M \in GL_n((K[y_1, \dots, y_{r-1}])[y_r])$$

slik at

$$g(y_1, \dots, y_r) = M g(y_1, \dots, y_{r-1}, 0).$$

Da er $g(y_1, \dots, y_{r-1}, 0)$ en EMV over $K[y_1, \dots, y_r]$:

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(y_1, \dots, y_r) g_i(y_1, \dots, y_r) = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} h_i(y_1, \dots, y_{r-1}, 0) g_i(y_1, \dots, y_{r-1}, 0) = 1.$$

Ved induksjonsantagelsen har så $g(y_1, \dots, y_{r-1}, 0)$ en EMU over $K[y_1, \dots, y_{r-1}]$, så $g(y_1, \dots, y_r)$ har en EMU over $K[y_1, \dots, y_r]$. $\square$