MA8202 Kommutativ algebra
Vår 2023

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving

Vi skal fullføre beviset for Teorem 30: hvis K er en algebraisk tallkropp, så er heltallsringen $\mathcal{O}_K$ et Dedekinddomene.

La $d = \dim_{\mathbb{Q}} K$. Fra Galoisteorien vet vi at det eksisterer d innhylninger $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ av K i $\mathbb{C}$, dvs. injektive ringavbildninger $K \longrightarrow \mathbb{C}$. Hva er disse? Vel, et annet resultat fra Galoisteorien sier at det eksisterer et element $\alpha \in K$ med $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Da er d graden til minimalpolynomet til α over $\mathbb{Q}$. Siden vi opererer over kropper med karakteristikk 0, har dette minimalpolynomet d ulike røtter $\alpha_1, \dots, \alpha_d$, med $\alpha = \alpha_1$. Hvis vi definerer $\sigma_i(\alpha) = \alpha_i$ er da σ_i en innhylning av K i $\mathbb{C}$.

For et element $w \in K$, definerer vi *trasen* $T(w)$ ved

$$T(w) = \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(w)$$

For d elementer $w_1, \dots, w_d \in K$ definerer vi *diskriminanten* $\Delta(w_1, \dots, w_d)$ til å være kvadratet av determinanten til $d \times d$-matrisen $(\sigma_i(w_j))$, dvs. $\Delta(w_1, \dots, w_d) = |\sigma_i(w_j)|^2$.

1

a) La $w \in K$ med minimalpolynom $f(x)$ av grad t over $\mathbb{Q}$. Da er $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(w) \subseteq K$, så t deler d. La $w_1, \dots, w_t$ være (de ulike) røttene til $f(x)$. Vis at

$$T(w) = \frac{d}{t}(w_1 + \cdots + w_t)$$

ved å bruke at enhver innhylning av $\mathbb{Q}(w)$ i $\mathbb{C}$ kan utvides til d/t ulike innhylninger av K i $\mathbb{C}$.

b) Vis at $T(w) \in \mathbb{Q}$ ved å se på $w_1 + \cdots + w_t$ og koeffisientene i $f(x)$.

c) Vis at dersom $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ er et monisk polynom, og $p(x) = f(x)g(x)$ for moniske polynomer $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, så er $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

d) Vis at $T(w) \in \mathbb{Z}$ dersom $w \in \mathcal{O}_K$.

2

a) Vis at $\Delta(w_1, \dots, w_d)$ er lik determinanten til $d \times d$-matrisen $[T(w_i w_j)]$ for alle elementer $w_1, \dots, w_d \in K$.

b) Vis at dersom $w_1, \dots, w_d \in \mathcal{O}_K$, så er $\Delta(w_1, \dots, w_d) \in \mathbb{Z}$.

3

a) Som nevnt innledningsvis, så eksisterer det et element $\alpha \in K$ med $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, og minimalpolynomet til dette elementet over $\mathbb{Q}$ må nødvendigvis ha grad d. Da er

$1, \alpha, \ldots, \alpha^{d-1}$ en basis for K over $\mathbb{Q}$. Vis at $\Delta(1, \alpha, \ldots, \alpha^{d-1})$ er lik kvadratet av Vandermonde-determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & \sigma_1(\alpha) & \cdots & \sigma_1(\alpha)^{d-1} \\ 1 & \sigma_2(\alpha) & \cdots & \sigma_2(\alpha)^{d-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \sigma_d(\alpha) & \cdots & \sigma_d(\alpha)^{d-1} \end{vmatrix}$$

slik at

$$\Delta\left(1, \alpha, \ldots, \alpha^{d-1}\right) = \prod_{i<j} \left(\sigma_i(\alpha) - \sigma_j(\alpha)\right)^2$$

Konkluder med at $\Delta(1, \alpha, \ldots, \alpha^{d-1}) \neq 0$.

b) Vis at dersom $w_1, \ldots, w_d$ og $u_1, \ldots, u_d$ er basiser for K over $\mathbb{Q}$, så eksisterer det en inverterbar $d \times d$-matrise M med $\Delta(w_1, \ldots, w_d) = \det(M)^2 \Delta(u_1, \ldots, u_d)$.

c) Vis at for alle elementer $w_1, \ldots, w_d \in K$ så er $\Delta(w_1, \ldots, w_d) \neq 0$ hvis og bare hvis elementene er lineært uavhengige over $\mathbb{Q}$ (og følgelig utgjør en $\mathbb{Q}$-basis for K).

4

a) Vis at for ethvert element $w \in K$ finnes et heltall $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ med $mw \in \mathcal{O}_K$. Følgelig har K en $\mathbb{Q}$-basis $w_1, \ldots, w_d$ med $w_i \in \mathcal{O}_K$.

b) La $w_1, \ldots, w_d$ være en $\mathbb{Q}$-basis for K med $w_i \in \mathcal{O}_K$. Dersom disse elementene ikke utgjør en $\mathbb{Z}$-basis for $\mathcal{O}_K$, så eksisterer det et element $w \in \mathcal{O}_K$ med $w = q_1 w_1 + \cdots + q_d w_d$ for $q_i \in \mathbb{Q}$, og ikke alle $q_i \in \mathbb{Z}$; vi kan anta at $q_1 \notin \mathbb{Z}$. Velg et element $m \in \mathbb{Z}$ med $0 \neq |m - q_1| \leq 1/2$, og sett $w_1' = w - m w_1$. Verifiser at $w_1' \in \mathcal{O}_K$, og vis at

$$\Delta(w_1', w_2, \ldots, w_d) = (m - q_1)^2 \Delta(w_1, \ldots, w_d)$$

c) La $w_1, \ldots, w_d$ være en $\mathbb{Q}$-basis for K med $w_i \in \mathcal{O}_K$, og slik at $|\Delta(w_1, \ldots, w_d)|$ er minimal i $\mathbb{Z}$. Vis at disse elementene da må utgjøre en $\mathbb{Z}$-basis for $\mathcal{O}_K$. Følgelig er $\mathcal{O}_K$ en Noethersk ring.

5

a) Vis at dersom $0 \neq \mathfrak{a}$ er et ideal i $\mathcal{O}_K$, så eksisterer det et heltall $0 \neq n \in \mathfrak{a}$.

b) Vis at dersom $0 \neq \mathfrak{a}$ er et ideal i $\mathcal{O}_K$, så er faktorringen $\mathcal{O}_K / \mathfrak{a}$ endelig.

c) Vis at ethvert endelig integritetsområde er en kropp.

d) Vis at dersom $0 \neq \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, så er $\mathfrak{p}$ et maksimalt ideal.