MA8202 Kommutativ algebra
Vår 2023

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving

La A være en kommutativ ring. Et primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ kalles *minimalt* dersom det ikke finnes noe primideal $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ med $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$.

$\boxed{1}$ Vis at enhver kommutativ ring har minst ett minimalt primideal (hint: Zorns lemma).

$\boxed{2}$ Vis at en Noethersk ring A har kun endelig mange minimale primidealer.

Algebraisk strategi: Vis mer generelt at dersom $\mathfrak{a}$ er et ekte ideal i A, så inneholder $V(\mathfrak{a})$ kun endelig mange minimale primidealer (med $\mathfrak{a} = 0$ får vi da resultatet). Anta at mengden med ekte idealer hvor dette ikke holder ikke er tom, da inneholder den et maksimalt element $\mathfrak{a}$. Dette kan ikke være et primideal, så derfor finnes elementer $b, c \in A$ med $bc \in \mathfrak{a}$, men med $b \notin \mathfrak{a}$ og $c \notin \mathfrak{a}$. Sett $\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}, b)$ og $\mathfrak{c} = (\mathfrak{a}, c)$. Hvis $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ må da $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})$ eller $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{c})$, så $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \cup V(\mathfrak{c})$.

Topologisk strategi: Vis at $\operatorname{Spec} A$ er et Noethersk topologisk rom, og generelt at alle Noetherske topologiske rom har kun endelig mange irredusible komponenter (dvs. maksimale irredusible delmengder). Vis at de irredusible komponentene i $\operatorname{Spec} A$ (for enhver ring) er på formen $V(\mathfrak{p})$, hvor $\mathfrak{p}$ er et minimalt primideal.