$(A, \underline{m})$ lokal Noeth ring, M endgn A-modul.

$$\dim M = \dim A/\mathrm{Ann}_A M \quad \text{(Krulldim)}$$

$$\delta(M) = \min\{t \geq 0 \mid \exists a_1, \dots, a_t \in \underline{m} \text{ med } l_A(M/(a_1, \dots, a_t)M) < \infty\}$$

$$d(M) = \deg \chi_M^{\underline{m}}(n) \quad \text{hvor} \quad \chi_M^{\underline{m}}(n) = l_A(M/\underline{m}^{n+1}M)$$

(vet at $\chi_M^{\underline{m}}$ rasj polynom for $n \gg 0$)

<u>Teorem 53</u> $\dim M = d(M) = \delta(M)$

Eksempler: (1) k kropp, $A = k[[x_1, \dots, x_n]]$ potensrekkering. Da er A lokal med $\underline{m} = (x_1, \dots, x_n)$. Kjede i Spec A:

$$(0) \subset (x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \cdots \subset \underline{m}$$

Så $\dim A \geq n$. Har også $l_A(A/\underline{m}) = l_A(A/(x_1, \dots, x_n)) = 1$, så per def er $\delta(A) \leq n$. Derfor:

$$\dim A = n$$

(2) k kropp, $A = k[[x,y]]/(xy, y^2)$. Da er $\underline{m} = (\bar{x}, \bar{y})$. Da er

$$A/\underline{m}^{n+1} \cong A/(xy, y^2, (x,y)^{n+1})$$

Som k-vektorrom har $A/\underline{m}^{n+1}$ basis $\{1, \bar{y}, \bar{x}, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n\}$ når $n \geq 1$, så

$$\chi_A^{\underline{m}}(n) = l_A(A/\underline{m}^{n+1}) = \dim_k A/\underline{m}^{n+1} = n+2 \text{. Derfor:}$$

$$\dim A = d(A) = \deg \chi_A^{\underline{m}}(n) = 1$$

Def: La $\mu(\underline{a})$ være minste antall elt som trengs for å generere et. ideal $\underline{a} \subseteq A$.

<u>Korollar 54</u> $\dim M \leq \dim A \leq \mu(\underline{m})$

Bevis: Har $l_A(A/\underline{m}) = 1$, så $\delta(A) \leq \mu(\underline{m})$ per def.

Def: A er en <u>regulær lokal ring</u> dersom $\dim A = \mu(\underline{m})$.

Eksempel: $A = k[[x_1, \dots, x_n]]$

Def: For $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ definerer vi <u>høyden</u> ht å være

$$\operatorname{ht} \mathfrak{p} = \max\{t \geq 0 \mid \exists \text{ kjede } \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_t \text{ i Spec } A\}$$

<u>Teorem 55</u> La A være en Noethersk ring (ikke nødv. lokal) og $\underline{a} \subseteq A$ et ideal. Da er $\operatorname{ht} \mathfrak{p} \leq \mu(\underline{a})$ $\forall \mathfrak{p}$ som er minimal i $V(\underline{a})$. Spesielt, hvis $\underline{a} = (x)$ er et prinsipalt ideal, så er $\operatorname{ht} \mathfrak{p} \leq 1$ $\forall \mathfrak{p}$ som er minimal i $V(\underline{a})$.

Bevis: Se på den lokale ringen $A_\mathfrak{p}$, som har max ideal $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Da er $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ det eneste primidealet som inneh $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}$, så $\dim A_\mathfrak{p}/\mathfrak{a}A_\mathfrak{p} = 0$. Fra øving er da $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}$ en Artinsk ring ($A_\mathfrak{p}$ er Noethersk), så $l_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}) < \infty$. Siden $A_\mathfrak{p}$ er Noeth lokal og $\mu(\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}) \leq \mu(\mathfrak{a})$, får vi

$$\dim A_\mathfrak{p} = \delta(A_\mathfrak{p}) \leq \mu(\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}) \leq \mu(\mathfrak{a})$$

og fra Korollar 12 er $\dim A_\mathfrak{p} = \operatorname{ht} \mathfrak{p}$. $\square$

Korollar 56 A Noethersk (ikke nødv lokal) $\Rightarrow \operatorname{ht} \mathfrak{p} \leq \mu(\mathfrak{p}) \;\forall\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.

Merk: Den "prinsipale" delen av Teorem 55 er Krulls prinsipalteorem.