Def: La A være en ring og M en A-modul

(1) En <u>filtrasjon</u> av M er en (nedstigende) kjede av undermoduler

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$$

(2) For et ideal $\underline{a} \subseteq A$ er filtrasjonen en <u>$\underline{a}$-filtrasjon</u> dersom $\underline{a} M_n \subseteq M_{n+1}$ $\forall n$.
Filtrasjonen er <u>$\underline{a}$-adisk</u> dersom $\underline{a} M_n = M_{n+1}$ $\forall n$, dvs $M_n = \underline{a}^n M$ $\forall n$.
Den er <u>essensielt</u> $\underline{a}$-adisk dersom den er en $\underline{a}$-filtrasjon med $\underline{a} M_n = M_{n+1}$ for $n \gg 0$.

Merk: Hvis M er som i (1) og $N \subseteq M$ en undermodul, så får vi en indusert filtrasjon av N

$$N = N \cap M_0 \supseteq N \cap M_1 \supseteq N \cap M_2 \supseteq \cdots$$

Hvis $M_n = \underline{a}^n M$ $\forall n$ (dvs filtrasjonen av M er $\underline{a}$-adisk), så er den induserte filtrasjonen

$$N = N \cap \underline{a}^0 M \supseteq N \cap \underline{a} M \supseteq N \cap \underline{a}^2 M$$

en $\underline{a}$-filt siden

$$\underline{a}(N \cap \underline{a}^n M) \subseteq N \cap \underline{a}^{n+1} M$$

<u>Lemma 51</u> (Artin-Rees)

Anta A er Noethersk, $\underline{a} \subseteq A$ et ideal, M en endeg A-modul, og $N \subseteq M$ en undermodul. Da er filtrasjonen av N indusert av den $\underline{a}$-adiske filtrasjonen av M essensielt $\underline{a}$-adisk, dvs

$$\underline{a}(N \cap \underline{a}^n M) = N \cap \underline{a}^{n+1} M \quad \text{for } n \gg 0$$

Bevis: La $G(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \underline{a}^n = A \oplus \underline{a} \oplus \underline{a}^2 \oplus \cdots$ og $G(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \underline{a}^n M = M \oplus \underline{a} M \oplus \underline{a}^2 M \oplus \cdots$
Da er $G(A)$ en gradert ring og $G(M)$ en gradert $G(A)$-modul. Siden A er Noeth er $\underline{a}$ endeg, dvs $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_t)$. Da er $G(A)$ endeg som algebra over $G(A)_0 = A$ av $a_1, \ldots, a_t \in G(A)_1$. Fra Prop 43 er da $G(A)$ en Noeth ring. La nå $m_1, \ldots, m_s \in M$ være en generatormengde, dvs $M = \sum_{i=1}^{s} A m_i$. Da er de en genmengde for $G(M)$ som $G(A)$-modul, når vi betrakter dem som elementer i $G(M)_0 = M$. Så $G(M)$ er en endeg modul over $G(A)$.
La nå $G(N) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} N \cap \underline{a}^n M$. Siden

$$\underline{a}(N \cap \underline{a}^n M) \subseteq N \cap \underline{a}^{n+1} M$$

er

$$\underline{a}^m (N \cap \underline{a}^n M) \subseteq N \cap \underline{a}^{m+n} M$$

for alle $m,n \geq 0$. Så $G(N)$ er en gradert $G(A)$-modul, og en undermodul av $G(M)$. Siden $G(A)$ er Noeth og $G(M)$ er endgen over $G(A)$, er også $G(N)$ endgen over $G(A)$. La $w_1,\dots,w_s \in G(N)$ være en generatormengde; vi kan anta de er homogene. La $d_i = \deg w_i$, dvs $w_i \in G(N)_{d_i}$, og sett $n_0 = \max\{d_1,\dots,d_s\}$. For $n \geq n_0$ er da

$$\underline{a}(N \cap \underline{a}^n M) = \underline{a}\, G(N)_n = \underline{a} \sum_{i=1}^{s} G(A)_{n-d_i} w_i = \underline{a} \sum_{i=1}^{s} \underline{a}^{n-d_i} w_i = \sum_{i=1}^{s} \underline{a}^{n+1-d_i} w_i$$
$$= G(N)_{n+1} = N \cap \underline{a}^{n+1} M \qquad \square$$

Nå: $(A,\underline{m})$ Noethersk lokal, M endgen A-modul.

Har sett: For $q \subseteq A$ $\underline{m}$-primært ($\Leftrightarrow A/q$ Artinsk $\Leftrightarrow \exists\, t \geq 1$ med $\underline{m}^t \subseteq q \subseteq \underline{m}$, fra Lemma 49), så gir Prop 50 at $l_A(M/q^{n+1}M) < \infty$ for $n \geq 1$, at funksjonen

$$\chi_M^q(n) \overset{\text{def}}{=} l_A(M/q^{n+1}M)$$

er et rasjonalt polynom for $n \gg 0$ (dvs $\exists\, \psi(x) \in \mathbb{Q}[x]$ med $\chi_M^q(n) = \psi(n)$ for $n \gg 0$), og at dersom $q' \subseteq A$ er et annet $\underline{m}$-primært ideal, så er

$$\deg \chi_M^q(n) = \deg \chi_M^{q'}(n)$$

Spesielt er $\deg \chi_M^q(n) = \deg \chi_M^{\underline{m}}(n)$ $\forall$ $\underline{m}$-primære $q \subseteq A$. Vi setter så

$$d(M) \overset{\text{def}}{=} \deg \chi_M^{\underline{m}}(n)$$

Def: $\chi_M^{\underline{m}}(n)$ er <u>Samuel-funksjonen</u> til M.

<u>Lemma 52</u> La $(A,\underline{m})$ være Noeth lokal og M en endgen A-modul. Gitt en eksakt følge

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

av A-moduler (merk at da er M' og M'' også endgen). Da gjelder:

(1) $\dim M = \max\{\dim M', \dim M''\}$

(2) $d(M) = \max\{d(M'), d(M'')\}$. Videre har (polynomene som for $n \gg 0$ samsvarer med) $\chi_M^q(n) - \chi_{M''}^q(n)$ og $\chi_{M'}^q(n)$ samme ledende ledd $\forall$ $\underline{m}$-primære $q \subseteq A$.

Bevis: (1) Fra Lemma 18 har vi

$$\operatorname{Supp} M = \operatorname{Supp} M' \cup \operatorname{Supp} M''$$

Videre har vi fra Korollar 17 at $\operatorname{Supp} N = V(\operatorname{Ann}_A N)$ når N er en endeg A-modul. Dette gir resultatet.

(2) Vi kan anta at $M' \subseteq M$ og at $M' \longrightarrow M$ er inklusjon. For hver $n \geq 1$ får vi en eksakt følge

$$0 \longrightarrow M'/(M' \cap q^n M) \longrightarrow M/q^n M \longrightarrow M''/q^n M'' \longrightarrow 0$$

som gir

$$\chi_M^q(n) = \chi_{M''}^q(n) + l_A\left(M'/(M' \cap q^{n+1} M)\right)$$

Siden $\chi_M^q(n)$ og $\chi_{M''}^q(n)$ er polynomer for $n \gg 0$, er også $\phi(n) \overset{\text{def}}{=} l_A\left(M'/(M' \cap q^n M)\right)$ det, og

$$d(M) = \max\{d(M''), \deg \phi\}$$

Fra Artin-Rees $\exists\, n_0$ med

$$q^n(M' \cap q^{n_0} M) = M' \cap q^{n+n_0} M \qquad \text{for } n \geq 0$$

Dette gir

$$q^{n+n_0} M' \subseteq M' \cap q^{n+n_0} M = q^n(M' \cap q^{n_0} M) \subseteq q^n M' \subseteq M' \cap q^n M$$

og derfor

$$l_A\left(M'/q^{n+n_0} M'\right) \geq l_A\left(M'/(M' \cap q^{n+n_0} M)\right) \geq l_A\left(M'/q^n M'\right) \geq l_A\left(M'/(M' \cap q^n M)\right)$$

dvs

$$\chi_{M'}^q(n+n_0) \geq \phi(n+n_0) \geq \chi_{M'}^q(n) \geq \phi(n)$$

Da må $\chi_{M'}^q(n)$ og $\phi(n)$ ha samme ledende ledd, og spesielt samme grad. Vi får da

$$d(M) = \max\{d(M''), d(M')\}$$

Videre, siden

$$\phi(n) = \chi_M^q(n-1) - \chi_{M''}^q(n-1)$$

har $\chi_M^q(n) - \chi_{M''}^q(n)$ samme ledende ledd som $\phi(n)$, som igjen er det samme som for $\chi_{M'}^q(n)$. $\square$