Heretter: $(A, \underline{m})$ lokal Noeth, M endgen A-modul. For et ideal $\underline{a} \subseteq A$:

$$Gr_{\underline{a}}(A) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{n=0}^{\infty} \underline{a}^n / \underline{a}^{n+1} = A/\underline{a} \oplus \underline{a}/\underline{a}^2 \oplus \underline{a}^2/\underline{a}^3 \oplus \cdots$$

$$Gr_{\underline{a}}(M) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{n=0}^{\infty} \underline{a}^n M / \underline{a}^{n+1} M = M/\underline{a}M \oplus \underline{a}M/\underline{a}^2 M \oplus \cdots$$

Lemma 48: La $a_1, \dots, a_t \in \underline{a}$ være generatorer. Da er $Gr_{\underline{a}}(A)$ gen som alg / $Gr_{\underline{a}}(A)_0$ av $a_1 + \underline{a}^2, \dots, a_t + \underline{a}^2 \in Gr_{\underline{a}}(A)_1$. Spesielt er $Gr_{\underline{a}}(A)$ Noeth. Videre er $Gr_{\underline{a}}(M)$ en endgen gr $Gr_{\underline{a}}(A)$-modul.

Lemma 49: For $q \subseteq \underline{m}$ ideal:

q $\underline{m}$-primært $\iff$ A/q Artinsk $\iff$ $\underline{m}^t \subseteq q$ for en $t \geq 1$.

<u>Proposisjon 50</u> Anta $q \subseteq A$ er $\underline{m}$-primært.

(1) $l_A(M/q^n M) < \infty$ for $n \geq 1$.

(2) Betrakt $P(Gr_q(M), x) = \sum_{n=0}^{\infty} l_{A/q}(q^n M / q^{n+1} M) x^n$. Fra Prop 46 er

$$P(Gr_q(M), x) = f(x)/(1-x)^d$$

for en $0 \leq d \leq t$ med $f(1) \neq 0$ hvis $d \geq 1$ (og $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$). Funksjonen

$$\chi_M^q(n) \overset{\text{def}}{=} l_A(M/q^{n+1}M)$$

er da et polynom av grad d for $n \geq \deg f$.

(3) Hvis q' er et annet $\underline{m}$-primært ideal, så er $\deg \chi_M^q(n) = \deg \chi_M^{q'}(n)$.

Bevis: (1) Induksjon på $n \geq 1$. For $n = 1$ er

$$l_A(M/qM) = l_{A/q}(M/qM) < \infty$$

siden A/q Artinsk og M/qM endgen A/q-modul. For $n \geq 2$, se på

$$0 \longrightarrow q^{n-1}M/q^n M \longrightarrow M/q^n M \longrightarrow M/q^{n-1}M \longrightarrow 0$$

Har $l_A(M/q^{n-1}M) < \infty$ pr induksjon, og også

$$l_A(q^{n-1}M/q^n M) = l_{A/q}(q^{n-1}M/q^n M) < \infty$$

siden (igjen) A/q Artinsk og $q^{n-1}M/q^n M$ endgen A/q-modul. Så

$$l_A(M/q^n M) = l_A(M/q^{n-1}M) + l_A(q^{n-1}M/q^n M) < \infty$$

(2) Fra beviset for (1) får vi ved induksjon på n

$$\chi_M^q(n) = \sum_{s=0}^{n} l_A(q^s M / q^{s+1} M)$$

$$= \sum_{s=0}^{n} l_{A/q}(q^s M / q^{s+1} M)$$

Hvis $d = 0$ er $l_{A/q}(q^s M / q^{s+1} M) = 0$ for $s > \deg f$, så for $n \geq \deg f$ er da

$$\chi_n^q(n) = \sum_{s=0}^{\deg f} \ell_{A/q}\left(q^s n / q^{s+1} n\right)$$

dvs et konstantpolynom av grad 0. Anta nå $d \geq 1$, og la

$$f(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$$

Fra beviset for Prop 47 er da

$$\ell_{A/q}\left(q^s n / q^{s+1} n\right) = \sum_{i=0}^{m} b_i \binom{s-i+d-1}{s-i}$$

for $s \geq m$, så for $n \geq m$ får vi

$$\chi_n^q(n) = \underbrace{\sum_{s=0}^{m-1} \ell_{A/q}\left(q^s n / q^{s+1} n\right)}_{b} + \sum_{s=m}^{n} \ell_{A/q}\left(q^s n / q^{s+1} n\right)$$

$$= b + \sum_{s=m}^{n}\left(\sum_{i=0}^{m} b_i \binom{s-i+d-1}{s-i}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{m} b_i \left(\sum_{s=m}^{n} \binom{s-i+d-1}{s-i}\right) + b$$

$$= \sum_{i=0}^{m} b_i \left(c + \sum_{s=i}^{n} \binom{s-i+d-1}{s-i}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{m} b_i \left(\sum_{s=i}^{n} \binom{s-i+d-1}{s-i}\right) + b'$$

For $u \geq v$ er $\binom{u}{v} = \binom{u-1}{v-1} + \binom{u-1}{v} = \binom{u-1}{v-1} + \binom{u-2}{v-1} + \binom{u-2}{v} + \cdots$

$$= \sum_{j=0}^{u-v} \binom{u-1-j}{v-1} = \sum_{s=0}^{u-v} \binom{s+v-1}{v-1}$$

Dette gir for $n \geq m$

$$\chi_n^q(n) = \sum_{i=0}^{m} b_i \left(\sum_{s=0}^{n-i} \binom{s+d-1}{d-1}\right) + b'$$

$$= \sum_{i=0}^{m} b_i \binom{n-i+d}{d} + b'$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \frac{b_i}{d!} \underbrace{(n-i+d)\cdots(n-i+1)}_{d \text{ faktorer}} + b'$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \frac{b_i}{d!} n^d + g_i(n) \qquad (\deg g_i \leq n-1)$$

$$= \frac{f(1)}{d!} n^d + g(n) \qquad (\deg g \leq n-1)$$

Siden $f(1) \neq 0$ er dette et polynom av grad d.

(3) Fra Lemma 49 finnes $r, s \geq 1$ med $\underline{m}^r \subseteq q \subseteq m$ og $\underline{m}^s \subseteq q' \subseteq \underline{m}$.

Da er $q^s \subseteq \underline{m}^s \subseteq q'$ og $(q')^r \subseteq \underline{m}^r \subseteq q$, og videre da

$$q^{s(n+1)} = (q^s)^{n+1} \subseteq (q')^{n+1}$$
$$(q')^{r(n+1)} = ((q')^r)^{n+1} \subseteq q^{n+1}$$

Dette gir surjeksjoner

$$M/q^{s(n+1)}M \longrightarrow M/(q')^{n+1}M$$
$$M/(q')^{r(n+1)}M \longrightarrow M/q^{n+1}M$$

slik at

$$\chi_M^{q'}(n) \leq \chi_M^{q}(sn+s-1)$$
$$\chi_M^{q}(n) \leq \chi_M^{q'}(rn+r-1)$$

Da må $\deg \chi_M^q = \deg \chi_M^{q'}$. □

Def: $d(M) = \deg \chi_M^{\underline{m}}(n) = \underbrace{}_{\text{Prop 50}} \deg \chi_M^q(n)$ for alle $\underline{m}$-primære $q \subseteq A$.

Merk: La $t \geq 1$ og definer $f_t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ved

$$f_t(n) = \sum_{i=1}^{n} i^t = 1^t + 2^t + \cdots + n^t$$

<u>Faulhabers formel</u> gir da at f_t er et rasjonalt polynom av grad $t+1$, nærmere bestemt er

$$f_t(n) = \frac{1}{t+1} n^{t+1} + g(n) \qquad \deg g \leq t$$

Hvis vi viser/godtar dette blir beviset for Prop 50(2) mye kortere:

$$\chi_M^q(n) = \sum_{s=0}^{n} l_{A/q}(q^s M / q^{s+1} M)$$

Fra Prop 47 $\exists\, \phi(x) \in \mathbb{Q}[x]$ av grad $d-1$ med $l_{A/q}(q^s M/q^{s+1}M) = \phi(s)$ for $s \geq \deg f$, så for $n \geq \deg f = m$

$$\chi_M^q(n) = \sum_{s=0}^{m} l_{A/q}(q^s M/q^{s+1}M) + \sum_{s=m+1}^{n} \phi(s)$$
$$= \underbrace{\sum_{s=0}^{m} l_{A/q}(q^s M/q^{s+1}M) - \sum_{s=0}^{m} \phi(s)}_{b} + \sum_{s=0}^{n} \phi(s)$$

Fra Faulhabers formel er $\sum_{s=0}^{n} \phi(s)$ et polynom i n av grad d.