Forrige gang: $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ gr ring, $M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$ gr A-modul

(1) Prop 43: A Noeth $\Leftrightarrow A_0$ Noeth $+ A = A_0[a_1, \ldots, a_t]$ hvor $a_i \in A^+$ homogene

(2) Prop 44: A Noeth $+ M \in \mathrm{mod} A \Rightarrow M_n \in \mathrm{mod} A_0 \ \forall n$

(3) Kor 45: Som Prop 44 $+ A_0$ Artinsk $\Rightarrow \ell_{A_0}(M_n) < \infty \ \forall n$. Gir Hilbertrekke

$$P(M,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_{A_0}(M_n) x^n \in \mathbb{Z}[[x]]$$

(4) Teorem 46: Som Kor 45 og $a_1, \ldots, a_t$ som i Prop 43, sett $d_i = \deg a_i \geq 1$. Da er

$$P(M,x) = f(x) \Big/ \prod_{i=1}^{t} (1 - x^{d_i})$$

for et polynom $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Proposisjon 47 Anta $d_1 = \cdots = d_t = 1$ i Teorem 46 (dvs $a_i \in A_1 \ \forall i$), slik at

$$P(M,x) = f(x) / (1-x)^d$$

for en $0 \leq d \leq t$ og med $f(1) \neq 0$ hvis $d > 0$. Da $\exists$ et polynom $\phi_M(x) \in \mathbb{Q}[x]$ av grad $d-1$ slik at

$$\ell_{A_0}(M_n) = \phi_M(n)$$

for $n > \deg f$.

Bevis: Hvis $d = 0$ er $P(M,x) \in \mathbb{Z}[x]$, dvs $M_n = 0$ for $n > \deg f$. Da setter vi $\phi_M(x) = 0$, og definerer $\deg \phi_M(x) = -1$.

Anta $d \geq 1$, og la

$$f(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$$

Ved induksjon på $d \geq 1$ er

$$1/(1-x)^d = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{n} x^n$$

som gir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ell_{A_0}(M_n) x^n = f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{n} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} \ell_{A_0}(M_n) x^n + \sum_{n=m}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{m} b_i \binom{n-i+d-1}{n-i} \right) x^n$$

For $n \geq m$ er da

$$\begin{aligned}
\ell_{A_0}(M_n) &= \sum_{i=0}^{m} b_i \binom{n-i+d-1}{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \frac{b_i}{(d-1)!} (n-i+d-1) \cdots (n-i+1) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \frac{b_i}{(d-1)!} n^{d-1} + g_i(x) \qquad (\deg g_i \leq d-2) \\
&= \frac{f(1)}{(d-1)!} n^{d-1} + g(x) \qquad (\deg g \leq d-2)
\end{aligned}$$

Siden $f(1) \neq 0$ er graden til polynomet $d-1$. $\square$

Def: (1) Polynomet ϕ_M i Prop 47 er Hilbertpolynomet til M

(2) Hilbertfunksjonen til M er $n \mapsto l_{A_0}(M_n)$.

Eksempel: $A = k[x,y,z]/(x^2, xy, xz)$ med $\deg x = \deg y = \deg z = 1$. Da er $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$

med $A_0 = k$, $A_1 = k\{x,y,z\}$, $A_2 = k\{y^2, yz, z^2\}$, $A_3 = k\{y^3, y^2z, yz^2, z^3\}, \ldots$

Gir

$$\begin{aligned} P(A,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\dim_k A_n) x^n \\ &= 1 + 3x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \\ &= x + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\ &= x + 1/(1-x)^2 \\ &= \frac{x^3 - 2x^2 + x + 1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

så $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ og $d = 2$. Har $\phi_A(n) = \dim_k A_n = n+1$ for $n \geq 2$.

Def: (1) La A være en ring (ikke gradert) og $\underline{a} \subseteq A$ et ideal. Den assosierte graderte ringen er gitt ved

$$Gr_{\underline{a}}(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \underline{a}^n / \underline{a}^{n+1} = A/\underline{a} \oplus \underline{a}/\underline{a}^2 \oplus \underline{a}^2/\underline{a}^3 \oplus \cdots$$

med mult

$$\underline{a}^m/\underline{a}^{m+1} \times \underline{a}^n/\underline{a}^{n+1} \longrightarrow \underline{a}^{m+n}/\underline{a}^{m+n+1}$$

gitt ved

$$(a + \underline{a}^{m+1})(b + \underline{a}^{n+1}) = ab + \underline{a}^{m+n+1}$$

(2) For en A-modul M får vi en gradert $Gr_{\underline{a}}(A)$-modul

$$Gr_{\underline{a}}(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \underline{a}^n M / \underline{a}^{n+1} M = M/\underline{a}M \oplus \underline{a}M/\underline{a}^2 M \oplus \cdots$$

Merk: (1) $Gr_{\underline{a}}(A)_1 \cdot Gr_{\underline{a}}(A)_1 = \underline{a}/\underline{a}^2 \cdot \underline{a}/\underline{a}^2 = \underline{a}^2/\underline{a}^3 = Gr_{\underline{a}}(A)_2$, og ved induksjon:

$$Gr_{\underline{a}}(A)_n = \underbrace{Gr_{\underline{a}}(A)_1 \cdots\cdots Gr_{\underline{a}}(A)_1}_{n}$$

for $n \geq 1$.

(2) $Gr_{\underline{a}}(M)_n = Gr_{\underline{a}}(A)_n \cdot Gr_{\underline{a}}(M)_0 = \underbrace{Gr_{\underline{a}}(A)_1 \cdots Gr_{\underline{a}}(A)_1}_{n} \cdot Gr_{\underline{a}}(M)_0$ for $n \geq 1$.

Lemma 48 Anta A er Noeth og $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_t) \subseteq A$ et ideal.

(1) $Gr_{\underline{a}}(A)$ er Noeth og generert som algebra over $Gr_{\underline{a}}(A)_0$ av elementene $a_1 + \underline{a}^2, \ldots, a_t + \underline{a}^2 \in Gr_{\underline{a}}(A)_1$.

(2) Hvis M er en endeliggen A-modul, så er $Gr_{\underline{a}}(M)$ en endeliggen gr $Gr_{\underline{a}}(A)$-modul.

Bevis: (1) Siden A er Noeth er $Gr_{\underline{a}}(A)_0 = A/\underline{a}$ også det. Siden
$a_1+\underline{a}^2, \dots, a_t+\underline{a}^2$
genererer $Gr_{\underline{a}}(A)_1 = \underline{a}/\underline{a}^2$ over $Gr_{\underline{a}}(A)_0$, og

$$Gr_{\underline{a}}(A)_n = \underbrace{Gr_{\underline{a}}(A)_1 \cdots Gr_{\underline{a}}(A)_1}_{n}$$

for $n \geq 1$, ser vi at $Gr_{\underline{a}}(A) = Gr_{\underline{a}}(A)_0[a_1+\underline{a}^2, \dots, a_t+\underline{a}^2]$. Fra Prop 43 er da $Gr_{\underline{a}}(A)$ Noeth.

(2) Anta $M = \sum_{i=0}^{s} Am_i$ for $m_i \in M$. Da er $Gr_{\underline{a}}(M) = \sum_{i=1}^{s} Gr_{\underline{a}}(A)(m_i + \underline{a}M)$, hvor $m_i + \underline{a}M \in Gr_{\underline{a}}(M)_0 = M/\underline{a}M$. $\square$

Lemma 49 Anta $(A, \underline{m})$ er en lokal Noeth ring og $q \subseteq \underline{m}$ et ideal. FEE:

(1) q er $\underline{m}$-primært.
(2) A/q er en Artinsk ring.
(3) $\exists\, t \geq 1$ med $\underline{m}^t \subseteq q$.

Bevis: Hvis (1) så er $r(q) = \underline{m}$. Generelt: har vist på øving at dersom $\underline{b}$ er et ideal i en Noeth ring, så $\exists\, t \geq 1$ med $r(\underline{b})^t \subseteq \underline{b}$. Så derfor $\exists\, t \geq 1$ med $\underline{m}^t \subseteq q$, dvs (3).

Anta (3). Ringen A/q er Noeth siden A er det. La $p \in \operatorname{Spec} A/q$. Da er $p = p'/q$ for en $p' \in \operatorname{Spec} A$ med $q \subseteq p'$. Siden $\underline{m}^t \subseteq q \subseteq p'$ er da $\underline{m} \subseteq p'$, så $p' = \underline{m}$, dvs $p = \underline{m}/q$. Da er $\dim A/q = 0$ (faktisk er jo $\operatorname{Spec} A/q = \{\underline{m}/q\}$), så fra oppg på øving er A/q Artinsk, dvs (2).

Anta (2). Da er $\dim A/q = 0$, så $\operatorname{Spec} A/q = \{\underline{m}/q\}$. Da er $V(q) = \{\underline{m}\}$, så $r(q) = \bigcap_{p \in V(q)} p = \underline{m}$. Fra Prop 24 er da q $\underline{m}$-primært. $\square$