Dimensjonsteori

A ring, M A-modul med $M \neq 0$.

Def: (1) Krulldimensjonen til M er $\dim M := \dim A/\mathrm{Ann}_A M$

(2) $\delta(M) = \inf\{n \geq 0 \mid \exists\, a_1, \dots, a_n \in I$ med $l_A(M/(a_1,\dots,a_n)M) < \infty\}$ hvor $I = \mathrm{rad}$

Merk: (1) Siden $\mathrm{Ann}_A A = 0$ er $\dim A = \dim A/\mathrm{Ann}_A A$.

(2) Skal vise: dersom $(A, \underline{m})$ er Noethersk og lokal så er

$$\dim M = \delta(M)$$

når M er endeliggen. La $\underline{m} = (x_1, \dots, x_t)$. Siden $l_A(M/\underline{m}M) < \infty$ ($M/\underline{m}M$ er jo et endeligdim vektorrom over $A/\underline{m}$) er $\delta(M) \leq t$, så vi får $\dim M \leq \mu(\underline{m})$ hvor $\mu(\underline{m})$ er antall gen for $\underline{m}$.

Spesielt:

$$\dim A \leq \mu(\underline{m}) < \infty$$

Hvis $\dim A = \mu(\underline{m})$ kalles A en regulær lokal ring. Essensielle ringer i alg geometri, Auslander-Buchsbaum-Serre (1956/1957):

$$A \text{ reg lokal} \iff \mathrm{gldim}\, A < \infty$$

hvor $\mathrm{gldim}\, A = \sup\{\mathrm{pd}_A M \mid M$ end gen A-modul$\}$. Triviell konsekvens:

$$A \text{ reg lokal} \Rightarrow A_{\mathfrak{p}} \text{ reg lokal } \forall\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$$

Def: (1) A er en gradert ring dersom $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ med A_i abelsk undergruppe, og $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$. Videre er M da en gradert A-modul dersom $M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$ med M_i ab undergr, og $A_i M_j \subseteq M_{i+j}$.

(2) Et elt i A_n (eller M_n) er homogent av grad n.

(3) Hvis M er en gr A-modul, så er $N \subseteq M$ en gradert undermodul dersom $N = \bigoplus_{i=0}^{\infty} N_i$ med $N_i \subseteq M_i$, og N gradert A-modul.

(4) Hvis A er gradert så er et ideal $\underline{a} \subseteq A$ homogent dersom

$x \in \underline{a} \Rightarrow$ alle de homogene komponentene til x er i $\underline{a}$.

Merk: (1) A_0 er en undering av A med $1 \in A_0$ (vis).

(2) M gradert A-modul $\Rightarrow M_i$ er en A_0-modul $\forall i$

(3) M gr A-modul, $N \subseteq M$ gr undermodul $\Rightarrow M/N = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i/N_i$ gr A-modul

(4) $\underline{a} \subseteq A$ homogent $\iff \underline{a}$ gradert undermodul av A.

Eksempler: (1) $A = k[x]$ med k kropp: $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ med $A_i = kx^i$

(2) Veialgebra kQ

Proposisjon 43 For en gr ring $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ er følgende ekv:

(1) A Noethersk

(2) A_0 Noethersk, og A er en endigen A_0-algebra (dvs $\exists$ $a_1, \dots, a_t \in A$ med $A = A_0[a_1, \dots, a_t]$, hvor $A[a_1, \dots, a_t]$ er underringen av A gen av A_0 og $a_1, \dots, a_t$).

Bevis: Hvis (2) er $A \simeq A_0[x_1, \dots, x_t]/\underline{a}$. Fra Hilberts basisteorem er $A_0[x_1, \dots, x_t]$ Noethersk, og derfor også A.

Anta A er Noethersk, og sett $A^+ = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$. Da er A^+ et ideal i A, så $A_0 \simeq A/A^+$ er Noethersk. Videre er A^+ endeliggen, så ta en generaltormengde $a_1, \dots, a_t$. Vi kan anta at disse er homogene, så sett $d_i = \deg a_i$ (dvs $a_i \in A_{d_i}$). Vi viser ved induksjon på $n \geq 1$ at

$$a \in A_n \Rightarrow a \in A_0[a_1, \dots, a_t]$$

Siden $a \in A_n$ og $a_1, \dots, a_t$ genererer A^+ som et ideal i A, er

$$a = \sum_{i=1}^{t} x_i a_i$$

med $x_i \in A_{n-d_i}$ (tenk litt på det). Hvis $n = 1$ må $x_i \in A_0$ $\forall i$ siden $d_i \geq 1$, så $a \in A_0[a_1, \dots, a_t]$. Hvis $n \geq 2$, så er $A_{n-d_i} \subseteq A_0[a_1, \dots, a_t]$ ved induksjon (igjen siden $d_i \geq 1$), så $x_i \in A_0[a_1, \dots, a_t]$ $\forall i$, og da er også $a \in A_0[a_1, \dots, a_t]$. Altså er $A_n \subseteq A_0[a_1, \dots, a_t]$ $\forall n \geq 1$, så $A = A_0[a_1, \dots, a_t]$. □

Proposisjon 44 La $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ være en Noethersk gr ring og $M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$ en endeliggen gr A-modul. Da er M_n en endeliggen A_0-modul $\forall n$.

Bevis: Se på $M = A$ først, induksjon på $n \geq 0$, med $n = 0$ trivielt. Anta $n \geq 1$, og la $a_1, \dots, a_t$ være som i Prop 43 med $\deg a_i = d_i \geq 1$. Da er

$$A_n = \sum_{i=1}^{t} A_{n-d_i} a_i$$

og siden A_{n-d_i} er endgen over A_0 ved induksjon er også A_n det. For generell M, la $m_1, \dots, m_s$ være generatorer over A, vi kan anta de er homogene; sett $\deg m_i = c_i$. Da er

$$M_n = \sum_{i=1}^{s} A_{n-c_i} m_i$$

som er endgen over A_0 siden hver A_i er det. □

Korollar 45 Hvis $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ er en Noethersk gr ring med A_0 Artinsk, og $M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$ er en endgen gr A-modul, så er

$$l_{A_0}(M_n) < \infty \quad \forall\, n \geq 0$$

Def: For A og M som i Korollar 45, så er

$$P(M,x) = \sum_{n=0}^{\infty} l_{A_0}(M_n) x^n \in \mathbb{Z}[[x]]$$

Hilbertrekken til M (evt Hilbert-Poincaré, evt bare Poincaré).

Eksempel: $A = k[x_1, .., x_t]$ polynomring, $\deg x_i = 1$, k kropp:

$$P(A,x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\dim_k A_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+t-1}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^t}$$

Her er A_n vektorrommet med basis $\{x_1^{n_1} \cdots x_t^{n_t} \mid n_1 + \cdots + n_t = n\}$.

Teorem 46 (Hilbert-Serre)

La A og M være som i Korollar 45, og $a_1, .., a_t$ som i Prop 43, dvs $A = A_0[a_1, ..., a_t]$ med $\deg a_i = d_i \geq 1$. Da er $P(M,x)$ rasjonal på form

$$P(M,x) = f(x) / \prod_{i=1}^{t} (1 - x^{d_i})$$

for et polynom $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Bevis: Induksjon på $t \geq 0$. Hvis $t = 0$ er $A = A_0$, og siden M og hver M_i er endgen over A_0 (antagelse og Prop 44) er $M_i = 0$ for $i \gg 0$. Så da er $P(M,x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Anta nå $t \geq 1$. For hver $n \geq 0$ har vi eksakt følge

$$0 \to K_n \to M_n \xrightarrow{\cdot a_t} M_{n+d_t} \to C_{n+d_t} \to 0 \qquad (*)$$

hvor $K_n = \mathrm{Ker}(\cdot a_t)$ og $C_{n+d_t} = \mathrm{Coker}(\cdot a_t)$. Får da eksakt

$$0 \to K \to M \xrightarrow{\cdot a_t} M \to C \to 0$$

av graderte A-moduler, hvor $K = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K_n$ og $C = \bigoplus_{n=0}^{\infty} C_n$. Siden A er Noethersk og M endgen over A, er både K og C endgen over A, og de er annihilert av a_t. Derfor er de endgen over $A[a_1, .., a_{t-1}]$.

Fra $(*)$ får vi

$$l_{A_0}(K_n) - l_{A_0}(M_n) + l_{A_0}(M_{n+d_t}) - l_{A_0}(C_{n+d_t}) = 0$$

så ved å multiplisere med x^{n+d_t} og summere får vi

$$x^{d_t} P(K,x) - x^{d_t} P(M,x) + P(M,x) - P(C,x) = g(x)$$

hvor $g(x) = \sum_{i=0}^{d_t - 1} (l_{A_0}(M_i) - l_{A_0}(C_i)) x^i$. Ved induksjon brukt på $P(K,x)$ og $P(C,x)$ får vi nå

$$(1 - x^{d_t}) P(M,x) = g(x) + P(C,x) + x^{d_t} P(K,x) = f(x) / \prod_{i=1}^{t-1} (1 - x^{d_i})$$

for en $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. $\square$