Dedekinddomener

Def: La A være en ring. <u>Krulldimensjonen</u> til A, $\dim A$, er supremum over alle $n \geq 0$ s.a. $\exists$ en kjede
$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$$
i $\operatorname{Spec} A$.

Fra tidligere: Anta A er et int.omr. Da er A et Dedekinddomene hvis
(a) A Noethersk
(b) $\dim A = 1$
(c) A heltallslukket
Videre er A en DVR hvis den i tillegg er lokal.

<u>Lemma 38</u> La A være en ring, og sett $\operatorname{Max} A = \{\text{maksimale idealer}\}$.
(1) For en A-modul M gjelder
$$M = 0 \iff M_{\mathfrak{p}} = 0 \ \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \iff M_{\mathfrak{m}} = 0 \ \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$$
(2) For en A-hom $f: M \to N$ gjelder
$$f \text{ surj} \iff f_{\mathfrak{p}} \text{ surj } \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \iff f_{\mathfrak{m}} \text{ surj } \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$$
(og tilsv for injektiv)

Bevis: (1) Hvis $M \neq 0$, ta et elt $0 \neq m \in M$, og se på $\operatorname{Ann}_A(m) \subseteq A$. Dette er et ekte ideal, så fra Korollar 2 $\exists$ $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ med $\operatorname{Ann}_A(m) \subseteq \mathfrak{m}$. Da er $m/1 \neq 0$ i $M_{\mathfrak{m}}$.
(2) Bruk (1) og Lemma 13 på
$$0 \to \operatorname{Ker} f \to M \xrightarrow{f} N \to \operatorname{Coker} f \to 0 \qquad \square$$

<u>Lemma 39</u> (1) La $A \subseteq B$ være ringer og C heltallstillukningen til A i B, dvs
$$C = \{ b \in B \mid b \text{ helt over } A\}$$
For $S \subseteq A$ mult er da $S^{-1}C$ h.t til $S^{-1}A$ i $S^{-1}B$.
(2) Hvis A er et int.omr, så gjelder
$$A \text{ heltallslukket} \iff A_{\mathfrak{p}} \text{ h.l. } \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \iff A_{\mathfrak{m}} \text{ h.l. } \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$$

Merk: A int.omr og $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \Rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ int.omr med $A \subseteq A_{\mathfrak{p}} \subseteq \operatorname{Quot}(A)$ og $\operatorname{Quot}(A_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{Quot}(A)$.

Bevis: (1) Fra Lemma 32(2) er $S^{-1}C$ hel over $S^{-1}A$. Anta et elt $b/s \in S^{-1}B$ er helt over $S^{-1}A$, dvs $\exists$ $n \geq 1$ og $a_0/s_0, \ldots, a_{n-1}/s_{n-1} \in S^{-1}A$ med
$$(b/s)^n + a_{n-1}/s_{n-1} (b/s)^{n-1} + \cdots + a_1/s_1 \cdot b/s + a_0/s_0 = 0$$
Multipliser med $s^n t^n$ hvor $t = s_0 \cdots s_{n-1}$, da ser vi at bt er helt over A, slik at $bt \in C$. Men da er $b/s = bt/st \in S^{-1}C$.
(2) La C være heltallstillukningen til A i $\operatorname{Quot}(A)$, og $i: A \to C$ inklusjon. Da er $C_{\mathfrak{p}}$ h.t til $A_{\mathfrak{p}}$ $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ fra (1). Bruk dette og Lemma 38(2). $\square$

<u>Teorem 40</u> La A være et Noethersk int. omr. med $\dim A = 1$. FEE:

(1) A er et Dedekinddomene.

(2) $A_{\mathfrak{p}}$ er en DVR $\forall\ 0 \neq \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.

(3) $\mathfrak{q} \subseteq A$ primært $\Rightarrow \exists\ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ med $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^n$ for en $n \geq 1$.

Bevis: Merk først at $\operatorname{Max} A = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \neq 0\}$. Hvis A er Dedekind, ta en $0 \neq \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Fra Korollar 12 er $\operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}} = \{(0), \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}\}$, så $A_{\mathfrak{p}}$ er et lokalt Noethersk int. omr med $\dim A_{\mathfrak{p}} = 1$. Fra Lemma 39 er $A_{\mathfrak{p}}$ også heltallslukket, og derfor en DVR. Motsatt, hvis $A_{\mathfrak{p}}$ er en DVR $\forall\ 0 \neq \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, gir Lemma 39 at A er heltallslukket, og derfor Dedekind. Dette viser $(1) \Leftrightarrow (2)$.

Anta nå (2), og la $\mathfrak{q} \subseteq A$ være primært. Hvis $\mathfrak{q} = (0)$ så ok (siden $(0) \in \operatorname{Spec} A$). Hvis $\mathfrak{q} \neq 0$ er $0 \neq r(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Spec} A$ fra Proposisjon 24(1), sett $r(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. Siden $A_{\mathfrak{p}}$ er en DVR og $\mathfrak{q}^e \neq 0$ i $A_{\mathfrak{p}}$, gir Proposisjon 37 at

$$\mathfrak{q}^e = (\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})^n = \mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}}$$

i $A_{\mathfrak{p}}$. Men $\mathfrak{p}^n$ er også primært i A fra Proposisjon 24(2), siden $r(\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}$. Altså er $\mathfrak{q}^e = (\mathfrak{p}^n)^e$ i $A_{\mathfrak{p}}$. Vi har vist (på øving) at vi generelt har bijeksjoner

$$\{\text{primære } \mathfrak{q} \subseteq A \text{ med } r(\mathfrak{q}) \subseteq \mathfrak{p}\} \underset{c}{\overset{e}{\rightleftarrows}} \{\text{primære idealer i } A_{\mathfrak{p}}\}$$

så $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^n$.

Anta nå (3), ta en $0 \neq \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, og la $0 \neq \underline{b}$ være et ideal i $A_{\mathfrak{p}}$. Da er $\underline{b}$ på form $\underline{a}^e$ for et ideal $0 \neq \underline{a} \subseteq A$. Fra Teorem 25 har $\underline{a}$ en primær dekomp

$$\underline{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t$$

og vi kan anta denne er minimal. Pr antagelse er $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i^{n_i}$ for en $0 \neq \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} A$ og $n_i \geq 1$, og $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$ for $i \neq j$. Vi får nå

$$\underline{b} = \underline{a}^e = \mathfrak{q}_1^e \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t^e = \mathfrak{p}_1^{n_1} A_{\mathfrak{p}} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_t^{n_t} A_{\mathfrak{p}}$$

For $0 \neq \mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}$ i $\operatorname{Spec} A$ er $(\mathfrak{p}')^n \not\subseteq \mathfrak{p}$ $\forall n \geq 1$, så $(\mathfrak{p}')^n A_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$. Så hvis $\underline{b} \neq A_{\mathfrak{p}}$ er $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$ for (nøyaktig) en $i \in \{1, \ldots, t\}$, og da er $\underline{b} = \mathfrak{p}^{n_i} A_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})^{n_i}$. Fra Proposisjon 37 er da $A_{\mathfrak{p}}$ en DVR. □

<u>Lemma 41</u> La A være et Noethersk intomr med $\dim A = 1$. Da kan alle ekte idealer $\underline{a} \subseteq A$ uttrykkes som et produkt

$$\underline{a} = \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_t$$

hvor $\mathfrak{q}_i$ primært og $r(\mathfrak{q}_i) \neq r(\mathfrak{q}_j)$ for $i \neq j$.

Merk: Kan vise unikhet.

Bevis: Hvis $\underline{a}=0$ så ok siden $(0)\in \operatorname{Spec} A$. Anta $\underline{a}\neq 0$, og ta en minimal primær dekomp (finnes fra Teorem 25)

$$\underline{a} = q_1 \cap \cdots \cap q_t$$

Da er $r(q_i)\in \operatorname{Spec} A$ med $r(q_i)\neq r(q_j)$ for $i\neq j$, og $r(q_i)\neq 0$ $\forall i$. Siden $\dim A = 1$ er da $r(q_i)\in \operatorname{Max} A$, og da er $r(q_i), r(q_j)$ koprimiske når $i\neq j$, dvs $A = r(q_i)+r(q_j)$. Men $r(q_i)+r(q_j)\subseteq r(q_i+q_j)$ (vis), så $A = r(q_i+q_j)$. Da må $q_i+q_j = A$, så $q_1,\dots,q_t$ er parvis koprimiske. Fra Proposisjon 5(1) er da

$$\underline{a} = q_1\cdots q_t \qquad \square$$

Korollar 42 La A være et Dedekinddomene og $\underline{a}\subseteq A$ et ekte ideal. Da kan $\underline{a}$ uttrykkes som et produkt

$$\underline{a} = p_1^{n_1}\cdots p_t^{n_t}$$

av primidealer.

Bevis: Lemma 41 og Teorem 40. $\square$

Skal vise: Unikhet i dekomp.

Eksempel: La $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$. Dette er en alg. tallkropp med heltallsring

$$O_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a+b\sqrt{-5} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$$

Ikke vist, men nevnt i et eksempel. Nevnte der at

$$2\cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$$

er to ulike faktoriseringer av $6\in O_K$ som et prod av irredusible elementer. Gir fakt av idealer

$$(*) \qquad (2)\cdot(3) = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$$

La nå $p_1 = (3, 1+\sqrt{-5})$, $p_2 = (3, 1-\sqrt{-5})$, $p_3 = (2, 1+\sqrt{-5})$. Kan vise at $p_i\in \operatorname{Spec} O_K$, og at

$$p_3^2 = (2)$$
$$p_1p_2 = (3)$$
$$p_1p_3 = (1+\sqrt{-5})$$
$$p_2p_3 = (1-\sqrt{-5})$$

Så idealfakt. $(*)$ blir til

$$p_3^2 p_1 p_2 = p_1p_3p_2p_3$$

Vet (Teorem 30) at O_K er et Dedekinddomene, og fra over ikke en UFD, men dette "rettes opp" av idealfaktorisering i primidealer.