Diskrete valuasjonsringer

Def: La A være et int.omr. og $K = \mathrm{Quot}(A)$. Da er A en <u>valuasjonsring</u> dersom
$$0 \neq x \in K \implies x \in A \vee x^{-1} \in A$$

<u>Lemma 36</u> Anta A v.r. med $K = \mathrm{Quot}(A)$.

(1) A er lokal

(2) A er heltallslukket i K.

(3) $A \subseteq B \subseteq K$ og B ring $\implies \mathrm{Quot}(B) = K$ og B valuasjonsring.

Bevis: (1) La $\underline{m} = \{x \in A \mid x \text{ ikke enhet}\}$. Da er $0 \in \underline{m}$, og hvis $a \in A$ og $x \in \underline{m}$ er $ax \in \underline{m}$: hvis $ax \notin \underline{m}$ er $(ax)^{-1} \in A$, som gir
$$x^{-1} = a \cdot a^{-1} \cdot x^{-1} = a(ax)^{-1} \in A$$
umulig siden $x \in \underline{m}$. La nå $x, y \in \underline{m}$. Hvis $x = 0 \vee y = 0$ er $x + y \in \underline{m}$, så anta $0 \neq x, y$. Da er $xy^{-1} \in A$ eller $yx^{-1} = (xy^{-1})^{-1} \in A$. Hvis $xy^{-1} \in A$ er
$$x + y = (1 + xy^{-1})y \in \underline{m}$$
siden $y \in \underline{m}$ og $1 + xy^{-1} \in A$. Tilsv er $x + y \in \underline{m}$ dersom $yx^{-1} \in A$. Så $\underline{m}$ er et ideal.

(2) Anta $x \in K$ er hel over A. Hvis $x \in A$ så ok. Hvis $x^{-1} \in A$, se på
$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (a_i \in A)$$
(x er jo rot i et monisk pol $f(x) \in A[x]$). Ved å multiplisere med $(x^{-1})^{n-1}$ ser vi at $x \in A$.

(3) Rett fram $\square$

Def: (1) La K være en kropp. En <u>diskret valuasjon</u> på K er en surjektiv avb
$$v : K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$$
som tilfredsstiller

(1) $v(xy) = v(x) + v(y)$ (dvs v er en gruppehom)

(2) $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ (setter $v(0) = \infty$)

Mengden
$$\{x \in K \mid x = 0 \vee x \neq 0 \text{ og } v(x) \geq 0\}$$
er <u>valuasjonsringen</u> for v

(2) Et int.omr A er en <u>diskret valuasjonsring</u> (DVR) hvis $\exists$ en d.v.
$$v : \mathrm{Quot}(A)^* \to \mathbb{Z}$$
med A som valuasjonsring.

Merk: (1) La $v: K^* \to \mathbb{Z}$ være en d.v og A valuasjonsringen. Da er

$$v(1) = v(1\cdot 1) = v(1) + v(1)$$

så $v(1)=0$ og derfor $1 \in A$. Får videre

$$0 = v(1) = v((-1)^2) = v(-1) + v(-1)$$

så $v(-1)=0$ og derfor $-1 \in A$. For $0 \neq x, y \in A$ får vi nå

$$v(x-y) \geq \min\{v(x), v(-y)\} = \min\{v(x), v(y)\} \geq 0$$

Siden $v(-y) = v(-1) + v(y) = v(y)$. Videre

$$v(xy) = v(x) + v(y) \geq 0$$

Så A er en ring.

(2) La K, v, A være som over, og ta $0 \neq x \in K$. Da er

$$0 = v(1) = v(x \cdot x^{-1}) = v(x) + v(x^{-1})$$

så $v(x) \geq 0$ eller $v(x^{-1}) \geq 0$, dvs $x \in A \vee x^{-1} \in A$. Her $\mathrm{Quot}(A) \subseteq K$, og for $0 \neq x \in K$ må $x \in \mathrm{Quot}(A)$: hvis $x \in A$ ok, hvis $x \notin A$ er $x^{-1} \in A$, og da $x = 1/x^{-1} \in \mathrm{Quot}(A)$. Så $K = \mathrm{Quot}(A)$, og A er en valuasjonsring som i første def før Lemma 36, og en DVR.

<u>Heretter:</u> K, v, A som over.

(3) A er lokal og heltallslukket (Lemma 36)

(4) Sett $\underline{m} = \{x \in K \mid v(x) > 0\}$. For $x, y \in \underline{m}$ er $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\} > 0$, så $x + y \in \underline{m}$. For $a \in A$ og $x \in \underline{m}$ er $v(ax) = v(a) + v(x) > 0$ siden $v(a) \geq 0$ og $v(x) > 0$, så $\underline{m}$ er et ideal. Hvis $u \in A \setminus \underline{m}$ er $v(u) = 0$, som gir

$$0 = v(1) = v(u \cdot u^{-1}) = v(u) + v(u^{-1})$$

så $u^{-1} \in A$, dvs u er en enhet i A. Altså er $\underline{m}$ det unike maksimale idealet i A.

(5) La $x, y \in A$ med $v(x) = v(y)$. Hvis $x, y \neq 0$ er

$$v(xy^{-1}) = v(x) + v(y^{-1}) = v(x) - v(y) = 0$$

så xy^{-1} er en enhet i A. Da er $(x) = (y)$. Motsatt, hvis $(x) = (y)$ er $y = ux$ for en enhet $u \in A$ (vis), så $v(y) = v(u) + v(x) = v(x)$.
Derfor: $\forall x, y \in A$ gjelder

$$v(x) = v(y) \iff (x) = (y)$$

(6) La $\underline{a} \subseteq A$ være et ideal og $m = \min\{v(x) \mid x \in \underline{a}\}$. Ta $a \in K^*$ med $v(a) = 1$ (v er surj), og $x \in \underline{a}$ med $v(x) = m$. Da er $a^t x \in \underline{a}$ $\forall t \geq 0$, og $v(a^t x) = t\,v(a) + v(x) = m + t$. Derfor:

$$\{v(x) \mid x \in A\} = \{m, m+1, m+2, \ldots\}$$

La nå $y \in A$ med $v(y) \geq m$. Da $\exists$ $x \in \underline{a}$ med $v(x) = v(y)$, og fra (5) er derfor $y \in \underline{a}$. Så

$$\underline{a} = \{x \in A \mid v(x) \geq m\}$$

(7) Fra (6) følger det at idealene i A er $\{0\}$ og $\underline{a}_i = \{x \in A \mid v(x) \geq i\}$ med kjede

$$A = \underline{a}_0 \supset \underline{a}_1 \supset \underline{a}_2 \supset \cdots \qquad (\underline{a}_\infty = (0))$$

Alle ulikhetene er ekte (v er surjektiv) og $\underline{m} = \underline{a}_1$.

(8) La $x \in A$ med $v(x) = 1$. Da er $(x^n) \subseteq A$ ideal med $\min\{v(y) \mid y \in (x^n)\} = n$, så $(x^n) = \underline{a}_n$ fra (7). Så idealene i A er

$$A \supset (x) \supset (x^2) \supset \cdots \supset (0)$$

med $\underline{m} = (x)$. Eneste primideal i A er da (0) og $\underline{m} = (x)$.

Oppsumert: A DVR $\Rightarrow$ A lokal PID (spesielt Noethersk) med da

$$\operatorname{Spec} A = \{(0), (x)\}$$

og alle idealene er (0) og (x^n), $n \geq 0$.

<u>Proposisjon 37</u> Hvis $(A, \underline{m}, k)$ er et lokalt Noethersk int.omr med $\operatorname{Spec} A = \{(0), \underline{m}\}$, så er følgende ekv:

(1) A er en DVR.
(2) A er heltallslukket i $\operatorname{Quot}(A)$.
(3) $\underline{m}$ er prinsipalt.
(4) $\dim_k \underline{m}/\underline{m}^2 = 1$
(5) $0 \neq \underline{a} \subseteq A$ ideal $\Rightarrow$ $\underline{a} = \underline{m}^t$ for en $t \geq 0$.
(6) $\exists$ $x \in A$ slik at $\forall$ idealer $0 \neq \underline{a} \subseteq A$ er $\underline{a} = (x^t)$ for en $t \geq 0$.

Bevis: Øving.

Eksempel: La $p \in \mathbb{Z}$ primtall. For $n \neq 0$ i $\mathbb{Z}$ er $n = p^t m$ med $p \nmid m$, og vi setter $v_p(n) = t$. For $a/b \in \mathbb{Q}$: $v_p(a/b) \overset{def}{=} v_p(a) - v_p(b)$ $(v_p(0) = \infty)$.
Da er v_p veldef på $\mathbb{Q}^*$, og vi får en disk. val (vis)

$$v_p : \mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Valuasjonsringen er

$$\{0\} \cup \{a/b \in \mathbb{Q} \mid v_p(a) \geq v_p(b)\} = \{a/b \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b\} = \mathbb{Z}_{(p)}$$