Opp- og nedstigning

$A \subseteq B$ ringer

Forrige gang: Et elt $b \in B$ er helt over A hvis $\exists$ monisk $f(x) \in A[x]$ med $f(b)=0$. Har at

$$R_A = \{ b \in B \mid b \text{ helt over } A \}$$

er en ring med $A \subseteq R_A \subseteq B$: dette er heltallstillukningen til A i B. Hvis $R_A = A$ er A heltallsluklet i B.

Proposisjon 31 Hvis A og B er int.omr og B er hel over A, så er

$$A \text{ kropp} \iff B \text{ kropp}$$

Bevis: Anta B kropp og ta $0 \neq a \in A$. Da har a en invers b i B, og $\exists\, a_i \in A$ med

$$b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0 = 0$$

Ved å multiplisere med a^{n-1} ser vi at $b \in A$, så A er en kropp.

Anta nå at B ikke er en kropp; da $\exists$ $0 \neq b \in B$ som ikke har en invers i B, og da heller ikke i A. Hvis $b \in A$ så er A ikke en kropp, så anta $b \notin A$. Da $\exists$ ligning som over, med $n \geq 2$ minimal ($n \geq 2$ siden $b \notin A$). Hvis $a_0 = 0$ er

$$0 = b(b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + \dots + a_1)$$

og siden $b \neq 0$ og B er et int. omr. er da n ikke minimal, en mots. Så $a_0 \neq 0$. Siden b ikke er inverterbar i B er a_0 ikke inverterbar i A, så A er ikke en kropp. $\square$

Lemma 32 Anta B er hel over A

(1) For et ideal $\underline{b} \subseteq B$, sett $\underline{a} = \underline{b}^c = A \cap \underline{b}$. Da er $B/\underline{b}$ hel over $A/\underline{a}$ (har $A/\underline{a} \subseteq B/\underline{b}$)

(2) $S \subseteq A$ mult $\Rightarrow S^{-1}B$ hel over $S^{-1}A$ (S mult i B, og $S^{-1}A \subseteq S^{-1}B$).

Bevis: Trivielt.

Proposisjon 33 Anta B er hel over A

(1) La $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ og sett $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c = \mathfrak{q} \cap A \in \operatorname{Spec} A$. Da er

$$\mathfrak{q} \text{ maksimalt} \iff \mathfrak{p} \text{ maksimalt}$$

(2) La $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \operatorname{Spec} B$ med $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$. Hvis $\mathfrak{q}_1^c = \mathfrak{q}_2^c$, så er $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$.

(3) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \Rightarrow \exists\ \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ med $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$.

Bevis: (1) Fra Lemma 32 er $B/\mathfrak{q}$ hel over $A/\mathfrak{p}$, og begge disse er int. omr, så vi kan bruke Prop 31.

(2) La $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1^c = \mathfrak{q}_2^c \in \operatorname{Spec} A$, og sett $S = A \setminus \mathfrak{p}$. Fra Lemma 32 er da $S^{-1}B$ hel over $S^{-1}A = A_\mathfrak{p}$. Se nå på $\mathfrak{p}^e = S^{-1}\mathfrak{p} \subseteq S^{-1}A$ og $\mathfrak{q}_i^e = S^{-1}\mathfrak{q}_i \subseteq S^{-1}B$. Under inklusjonen $S^{-1}A \subseteq S^{-1}B$ er da

$$(\mathfrak{q}_i^e)^c = S^{-1}A \cap \mathfrak{q}_i^e = \mathfrak{p}^e$$

Alle disse tre idealene er primidealer siden $\mathfrak{p} \cap S = \mathfrak{q}_i \cap S = \phi$, og $\mathfrak{p}^e$ er det maksimale idealet i $S^{-1}A = A_\mathfrak{p}$. Da er $\mathfrak{q}_i^e$ også maksimalt fra (1), og siden $\mathfrak{q}_1^e \subseteq \mathfrak{q}_2^e$ må derfor $\mathfrak{q}_1^e = \mathfrak{q}_2^e$ i $S^{-1}B$. Bijeksjonen

$$\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \mid \mathfrak{q} \cap S = \phi\} \xrightarrow{(\ )^e} \{\operatorname{Spec} S^{-1}B\}$$

gir da at $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$.

(3) Se på det komm. diag. av ringavb.

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{i}{\hookrightarrow} & B \\ \downarrow f_A & & \downarrow f_B \\ S^{-1}A & \overset{S^{-1}i}{\hookrightarrow} & S^{-1}B \end{array}$$

hvor $S = A \setminus \mathfrak{p}$, og f_A og f_B er de naturlige avb $x \longmapsto x/1$. La $\underline{m}$ være et maksimalt ideal i $S^{-1}B$ (det eksisterer fra Teorem 1), og se på

$$S^{-1}A \overset{S^{-1}i}{\hookrightarrow} S^{-1}B$$

Fra (1) er da $\underline{m}^c$ maksimalt i $S^{-1}A = A_\mathfrak{p}$, så $\underline{m}^c = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ siden $A_\mathfrak{p}$ lokal med maksimalt ideal $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Da er

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &= f_A^{-1}(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}) \\ &= f_A^{-1}(\underline{m}^c) \\ &= i^{-1} \circ f_B^{-1}(\underline{m}) \\ &= f_B^{-1}(\underline{m})^c \end{aligned}$$

hvor $f_B^{-1}(\underline{m}) \in \operatorname{Spec} B$. $\square$

Eksempel: La K være en alg. tallkropp og $\mathcal{O}_K$ heltallsringen. Har vist på øving at $\mathcal{O}_K$ er et Dedekinddomene (Teorem 30), og da bl.a. at

$$0 \neq \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \Rightarrow \mathfrak{p} \text{ maksimalt.}$$

Ved å se på $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{O}_K$ (og at $\mathcal{O}_K$ er hel over $\mathbb{Z}$ per def) og bruke Prop 33, får vi et annet bevis:

$$0 \subset \mathfrak{p} \text{ i } \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \Rightarrow 0 \subset \mathfrak{p}^c \text{ i } \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \text{ (ekte inkl).}$$

Da er $\mathfrak{p}^c$ maksimalt i $\mathbb{Z}$, så $\mathfrak{p}$ er maksimalt i $\mathcal{O}_K$.

Teorem 34 (Oppstigning)

Anta $A \subseteq B$ med B hel over A, og $\mathfrak{p}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_n$ en kjede i Spec A. Anta videre at $\mathfrak{q}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_t$ er en kjede i Spec B med $t \leq n$, og slik at $\mathfrak{q}_i^c = \mathfrak{p}_i$ (dvs $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$). Da kan denne utvides til en kjede $\mathfrak{q}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_n$ i Spec B, med $\mathfrak{q}_i^c = \mathfrak{p}_i$.

Bevis: Fra Lemma 32 er $B/\mathfrak{q}_t$ hel over $A/\mathfrak{p}_t$. Hvis $t \leq n-1$, se på primidealet $\mathfrak{p}_{t+1}/\mathfrak{p}_t$ i $A/\mathfrak{p}_t$. Fra Prop 33(3) finnes en $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B/\mathfrak{q}_t$ med $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}_{t+1}/\mathfrak{p}_t$ (under inklusjonen $A/\mathfrak{p}_t \subseteq B/\mathfrak{q}_t$). La $\mathfrak{q}_{t+1} \in \operatorname{Spec} B$ med $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{t+1}/\mathfrak{q}_t$. Da er $\mathfrak{q}_t \subseteq \mathfrak{q}_{t+1}$, og $A \cap \mathfrak{q}_{t+1} = \mathfrak{p}_{t+1}$. $\square$

Nedstigning krever sterkere antagelser.

Teorem 35 (Nedstigning)

Anta $A \subseteq B$ er int. områder med B hel over A, og at A i tillegg er heltallslukket i Quot(A). La $\mathfrak{p}_n \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_1$ være en kjede i Spec A, og $\mathfrak{q}_t \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_1$ en kjede i Spec B med $t \leq n$ og $\mathfrak{q}_i^c = \mathfrak{p}_i$. Da kan denne siste utvides til en kjede $\mathfrak{q}_n \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_1$ i Spec B, med $\mathfrak{q}_i^c = \mathfrak{p}_i$.

Bevis: Selvstudium.