Husk: En full underkat $\mathcal{A} \subseteq K^b(\text{proj } A)$ er <u>tykk</u> dersom:

triangulert underkategori
(a) $\mathcal{A} \neq \emptyset$
(b) $X \in \mathcal{A} \Rightarrow \Sigma^n X \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
(c) $X \to Y \to Z \to \Sigma X$ dist tri i $K^b(\text{proj}A)$ og to av $\{X,Y,Z\}$ i $\mathcal{A}$, så er alle i $\mathcal{A}$

(d) $X \oplus Y \in \mathcal{A} \Rightarrow X, Y \in \mathcal{A}$

For $X \in K^b(\text{proj } A)$ er $\text{thick}(X) = \bigcap_{X \in \mathcal{A},\, \mathcal{A} \text{ tykk}} \mathcal{A}$

<u>Lemma 22</u> For $X, Y \in K^b(\text{proj}A)$:

$$\text{Supp}\, X \subseteq \text{Supp}\, Y \Leftrightarrow \text{thick}(X) \subseteq \text{thick}(Y)$$

Bevis: Anta $\text{thick}(X) \subseteq \text{thick}(Y)$, og definer

$$\mathcal{A} = \{Z \in K^b(\text{proj}A) \mid \text{Supp}\, Z \subseteq \text{Supp}\, Y\}$$

Da er $\mathcal{A}$ tykk (Lemma 20) og $Y \in \mathcal{A}$. Da må $\text{thick}(Y) \subseteq \mathcal{A}$, og videre $\text{thick}(X) \subseteq \mathcal{A}$. Siden $X \in \mathcal{A}$ er da $\text{Supp}\, X \subseteq \text{Supp}\, Y$.

Motsatt: det virkelige arbeidet i beviset for Hopkins-Neeman-teoremet. $\square$

Def: En delmengde $W \subseteq \text{Spec}\, A$ er <u>lukket under spesialisering</u> dersom
$$\mathfrak{p} \in W \text{ og } \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q} \Rightarrow \mathfrak{q} \in W \quad (\text{dvs } V(\mathfrak{p}) \subseteq W \ \forall \mathfrak{p} \in W)$$

<u>Teorem 23</u> (Hopkins-Neeman)
Se på avbildningene

$$\{\mathcal{A} \subseteq K^b(\text{proj}A) \mid \mathcal{A} \text{ tykk}\} \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightleftarrows}} \{W \subseteq \text{Spec}\, A \mid W \text{ spes. lukket}\}$$

gitt ved

$$\phi(\mathcal{A}) = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} \text{Supp}\, X$$

$$\psi(W) = \{X \in K^b(\text{proj}A) \mid \text{Supp}\, X \subseteq W\} \quad (\text{full underkat})$$

Disse er inverse bijeksjoner.

Bevis: For $X \in K^b(\text{proj}A)$ er $\text{Supp}\, X = V(\text{Ann}_A H_*(X))$, så $\phi(\mathcal{A})$ er spes.lukket for enhver underkat $\mathcal{A} \subseteq K^b(\text{proj}A)$. Motsatt, hvis $W \subseteq \text{Spec}\, A$ er en delmengde, så er $\psi(W)$ en tykk underkat av $K^b(\text{proj}A)$ fra Lemma 20.

La $\mathcal{U} \subseteq K^b(\text{proj}\,A)$ være en tykk underkat. Da er

$$\psi \circ \phi(\mathcal{U}) = \{Y \in K^b(\text{proj}\,A) \mid \text{Supp}\,Y \subseteq \phi(\mathcal{U})\}$$
$$= \{Y \in K^b(\text{proj}\,A) \mid \text{Supp}\,Y \subseteq \bigcup_{X \in \mathcal{U}} \text{Supp}\,X\}$$

Hvis $X \in \mathcal{U}$ er da $X \in \psi \circ \phi(\mathcal{U})$, så vi får

$$\mathcal{U} \subseteq \psi \circ \phi(\mathcal{U}).$$

Anta motsatt at $X \in \psi \circ \phi(\mathcal{U})$. Dersom $X \simeq 0$ så er $X \in \mathcal{U}$, så anta $X \not\simeq 0$. Da er $\mathfrak{a} = \text{Ann}_A H_*(X) \neq A$ (hvis $H_*(X) = 0$ er X eksakt, og må derfor splitte opp i en direkte sum av komplekser på form

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P \xrightarrow{1} P \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

siden alle modulene er projektive. Men slike komplekser er kontraktible, dvs null, i $K^b(\text{proj}\,A)$). På øving har vi vist at en Noethersk ring har minimale primidealer, og kun endelig mange. Anvendt på ringen $A/\mathfrak{a}$ gir dette at $V(\mathfrak{a})$ har endelig mange minimale elementer $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t$, med $t \geq 1$. Da er

$$\bigcup_{i=1}^{t} V(\mathfrak{p}_i) = V(\mathfrak{a}) = \text{Supp}\,X \subseteq \bigcup_{Y \in \mathcal{U}} \text{Supp}\,Y$$

hvor inklusjonen kommer fra antagelsen $X \in \psi \circ \phi(\mathcal{U})$. For hver $i \in \{1, \ldots, t\}$ finnes derfor $Y_i \in \mathcal{U}$ med $\mathfrak{p}_i \in \text{Supp}\,Y_i = V(\text{Ann}_A H_*(Y_i))$, og da også $V(\mathfrak{p}_i) \subseteq \text{Supp}\,Y_i$. Dette gir

$$\text{Supp}\,X = \bigcup_{i=1}^{t} V(\mathfrak{p}_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{t} \text{Supp}\,Y_i = \text{Supp}\,Y$$

hver $Y = \bigoplus_{i=1}^{t} Y_i$, fra Lemma 20. Siden $Y_i \in \mathcal{U}$ er $Y \in \mathcal{U}$ (en triangulert underkat er lukket under direkte sum pga 2/3-egenskapen på triangler), så Lemma 22 gir

$$\text{thick}(X) \subseteq \text{thick}(Y)$$

Siden $\mathcal{U}$ er tykk og $Y \in \mathcal{U}$ er $\text{thick}(Y) \subseteq \mathcal{U}$, så $X \in \mathcal{U}$. Dette viser at $\psi \circ \phi(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$, så $\mathcal{U} = \psi \circ \phi(\mathcal{U})$.

La nå $W \subseteq \text{Spec}\,A$ være en delmengde som er lukket under spesialisering. Vi har

$$\phi \circ \psi(W) = \bigcup_{Y \in \psi(W)} \text{Supp}\,Y$$
$$= \bigcup_{\text{Supp}\,Y \subseteq W} \text{Supp}\,Y$$

Hvis $\mathfrak{p} \in \phi\circ\psi(W)$ er da $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} Y$ for et kompleks $Y \in K^b(\operatorname{proj} \Lambda)$ med $\operatorname{Supp} Y \subseteq W$, så $\mathfrak{p} \in W$. Dette gir

$$\phi\circ\psi(W) \subseteq W$$

Anta motsatt at $\mathfrak{p} \in W$, og se på Koszulkomplekset $A /\!\!/ \mathfrak{p}$. Fra Lemma 21 er

$$\operatorname{Supp} A/\!\!/\mathfrak{p} = \operatorname{Supp} A \cap V(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{p})$$

(A er stilkkomplekset med A i grad 0, så $\operatorname{Supp} A = \{\mathfrak{p} \mid \Lambda_{\mathfrak{p}} \neq 0\} = \operatorname{Spec} \Lambda$). Siden W er spes.lukket er $\operatorname{Supp} A/\!\!/\mathfrak{p} \subseteq W$, så

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} A/\!\!/\mathfrak{p} \subseteq \bigcup_{\operatorname{Supp} Y \subseteq W} \operatorname{Supp} Y = \phi\circ\psi(W).$$

Dette viser at $W \subseteq \phi\circ\psi(W)$, så $W = \phi\circ\psi(W)$. $\square$