Lokalisering

A kommutativ ring

Def: (1) En delmengde $S \subseteq A$ er <u>multiplikativ</u> dersom

(a) $1 \in S$

(b) $s, t \in S \Rightarrow st \in S$

(2) For mult $S \subseteq A$, definer relasjon $\sim$ på $A \times S$ ved

$$(a,s) \sim (b,t) \iff \exists\, u \in S \text{ med } u(at - bs) = 0$$

<u>Lemma 10</u> (1) Dette er en ekv.-rel.

(2) Anta $(a,s) \sim (a',s')$ og $(b,t) \sim (b',t')$. Da gjelder

$$(ab, st) \sim (a'b', s't')$$

$$(at + bs, st) \sim (a't' + b's', s't')$$

Def: Ekv.-klassen til (a,s) betegnes a/s, mengden av ekv.klasser med $S^{-1}A$.

<u>Korollar 11</u> Operasjonene $a/s \cdot b/t \overset{def}{=} ab/st$ og $a/s + b/t \overset{def}{=} (at+bs)/st$ er veldef og gir en ringstruktur på $S^{-1}A$.

Merk: (1) Nullelt i $S^{-1}A$ er $0/1$

(2) Id-elt er $1/1$

(3) $a/s = ta/ts \quad \forall\, t \in S$

(4) $a \in S \Rightarrow a/s$ enhet $\forall\, s \in S$ fordi $a/s \cdot s/a = 1$

(5) Ring hom $\phi_S : A \to S^{-1}A$ med $\phi_S(a) = a/1$

(6) $a \in \operatorname{Ker} \phi_S \iff \exists\, s \in S$ med $as = 0$

Def: $S^{-1}A$ er brøkringen til A mhp S.

Eksempler: (1) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \Rightarrow S = A \setminus \mathfrak{p}$ mult. <u>Lokalisering</u> i $\mathfrak{p}$:

$$A_{\mathfrak{p}} \overset{def}{=} S^{-1}A = \{a/s \mid s \notin \mathfrak{p}\}$$

(2) $S = \{$ikke-nulldiv i $A\} = \{s \in A \mid as \neq 0 \;\; \forall\, 0 \neq a \in A\}$ mult. $S^{-1}A$ er den <u>totale brøkringen</u> til A, og $\phi_S : A \to S^{-1}A$ er da inj. Spesielt:

A intomr $\Rightarrow S = A \setminus \{0\} \Rightarrow S^{-1}A = \{a/s \mid s \neq 0\}$ er <u>kvotientkroppen</u>.

For $A = \mathbb{Z}$ er da $S^{-1}A = \mathbb{Q}$.

Spørsmål: Hva er idealene i $S^{-1}A$?

Se på $\phi_S : A \to S^{-1}A$. For et ideal $\underline{a} \subseteq A$ er $\underline{a}^e$ idealet i $S^{-1}A$ gen av $\phi_S(\underline{a})$, dvs

$$\underline{a}^e = \{ a/s \mid s \in S \} = S^{-1}\underline{a}$$

For et ideal $\underline{b} \subseteq S^{-1}A$ er $\underline{b}^c = \phi_S^{-1}(\underline{b})$ et ideal i $\underline{a}$.

Vis: (1) $\underline{a} \cap S \neq \phi \iff \underline{a}^e = S^{-1}A$

(2) $\underline{b} \subseteq S^{-1}A \Rightarrow \underline{b} = \underline{b}^{ce}$ (så alle idealer i $S^{-1}A$ er på form $\underline{a}^e$)

(3) $q \in \operatorname{Spec} S^{-1}A \Rightarrow q^c \in \operatorname{Spec} A$ (generelt for ringhom). Motsatt, hvis $p \in \operatorname{Spec} A$ og $p \cap S = \phi$ er $p^e \in \operatorname{Spec} S^{-1}A$

(4) Bijeksjon

$$\{ p \in \operatorname{Spec} A \mid p \cap S = \phi \} \longleftrightarrow \operatorname{Spec} S^{-1}A$$
$$p \longmapsto p^e = S^{-1}p$$
$$q^c \longleftarrow\!\shortmid\; q$$

Korollar 12 For $p \in \operatorname{Spec} A$ får vi bijeksjon

$$\{ q \in \operatorname{Spec} A \mid q \subseteq p \} \longrightarrow \operatorname{Spec} A_p$$
$$q \longmapsto qA_p = \{ a/s \mid a \in q, s \notin p \}$$

Spesielt er A_p lokal m/ max ideal pA_p.

Moduler: For A-modul M, ekv. rel på $M \times S$ som for $A \times S$, gir $S^{-1}A$-modul

$$S^{-1}M = \{ m/s \mid m \in M, s \in S \}$$

For A-hom $f : M \to N$ får vi $S^{-1}A$-hom

$$S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}N$$
$$m/s \longmapsto f(m)/s$$

Lemma 13 $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ eksakt i Mod A $\Rightarrow S^{-1}L \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}N$ eksakt i Mod $S^{-1}A$

Merk: (1) S^{-1} kommuterer m/ direkte summer av moduler

(2) Fra (1) og Lemma 13: $S^{-1} : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} S^{-1}A$ eksakt funktor. Spesielt for $L \subseteq M$ er $S^{-1}(M/L) \simeq S^{-1}M/S^{-1}L$.

Lemma 14 $S^{-1}M \simeq S^{-1}A \otimes_A M$ i Mod $S^{-1}A$

Bevis: Vis at $S^{-1}A \otimes_A M \to S^{-1}M$ gitt ved $\sum (a_i/s_i \otimes m_i) \mapsto \sum a_i m_i / s_i$ iso. □

Korollar 15 (1) $S^{-1}A$ flat A-modul ($S^{-1}A \otimes_A -$ eksakt funktor)

(2) $S^{-1}(M \otimes_A N) \simeq S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N$

Lemma 16 $M \in \mathrm{Mod}\,A$ end gen $\Rightarrow S^{-1}(\mathrm{Ann}_A M) = \mathrm{Ann}_{S^{-1}A} S^{-1}M$.

Korollar 17 $M \in \mathrm{Mod}\,A$ end gen og $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,A$:

$$M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \iff \mathrm{Ann}_A M \subseteq \mathfrak{p}$$

Bevis: $M_{\mathfrak{p}} = 0 \iff \mathrm{Ann}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}} \overset{L16}{\iff} A_{\mathfrak{p}} = (\mathrm{Ann}_A M)_{\mathfrak{p}} \iff \mathrm{Ann}_A M \subseteq \mathfrak{p}$. $\square$

Def: For $M \in \mathrm{Mod}\,A$ er $\mathrm{Supp}\,M = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,A \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$.

Så fra Kor 17, hvis M end gen er $\mathrm{Supp}\,M = V(\mathrm{Ann}_A M)$.

Lemma 18 $0 \to L \to M \to N \to 0$ eksakt i $\mathrm{Mod}\,R \Rightarrow$

$$\mathrm{Supp}\,M = \mathrm{Supp}\,L \cup \mathrm{Supp}\,N$$

Spesielt er $\mathrm{Supp}(L \oplus N) = \mathrm{Supp}\,L \cup \mathrm{Supp}\,N$

Bevis: For $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,A$ er $0 \to L_{\mathfrak{p}} \to M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}} \to 0$ eksakt fra Lemma 13 $\square$

Nakayamas lemma

Teorem 19 (Nakayama)

Hvis $M \in \mathrm{Mod}\,A$ er endgen og $\underline{a} \subseteq \mathfrak{r} = \bigcap_{\mathfrak{m}\ \max} \underline{m}$, så er

$$M = \underline{a}M \iff M = 0$$

Bevis: Ta en minimal generatormengde $\{m_1, .., m_t\}$ for M, med $t \geq 1$ (dvs anta $M \neq 0$). Da $\exists\ a_1, .., a_t \in \underline{a}$ med

$$m_1 = a_1 m_1 + \cdots + a_t m_t$$

Som gir

$$(1 - a_1) m_1 = a_2 m_2 + \cdots + a_t m_t$$

Men $1 - a_1$ er inverterbar fra Prop 4, så $\{m_2, .., m_t\}$ gen M, motsigelse $\square$