Primspekteret

Def: (1) $\operatorname{Spec} A = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ primideal i } A\}$ (primspekteret til A)

(2) $S \subseteq A$ delmengde: $V(S) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid S \subseteq \mathfrak{p}\}$

$D(S) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid S \nsubseteq \mathfrak{p}\}$

Mrk: (1) $V(S) = V(\langle S \rangle)$ hvor $\langle S \rangle$ er idealet i A gen av S

(2) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow V(S_1) \supseteq V(S_2)$

(3) Hvis $\underline{a} \subseteq A$ ideal: $V(\underline{a}) = V(r(\underline{a}))$ $\quad (r(\underline{a}) = \{x \in A \mid x^n \in \underline{a} \text{ for en } n \geq 1\})$

(4) $V(0) = \operatorname{Spec} A$, $V(1) = \phi$, $D(0) = \phi$, $D(1) = \operatorname{Spec} A$

(5) Ω indeksmengde og $\{\underline{a}_w \mid w \in \Omega\}$ idealer:

$$\bigcap_{w \in \Omega} V(\underline{a}_w) = V\Big(\sum_{w \in \Omega} \underline{a}_w\Big)$$

$$\bigcup_{w \in \Omega} D(\underline{a}_w) = D\Big(\sum_{w \in \Omega} \underline{a}_w\Big)$$

(6) For idealer $\underline{a}, \underline{b} \subseteq A$:

$$V(\underline{a}) \cup V(\underline{b}) = V(\underline{a}\,\underline{b}) = V(\underline{a} \cap \underline{b})$$

$$D(\underline{a}) \cap D(\underline{b}) = D(\underline{a}\,\underline{b}) = D(\underline{a} \cap \underline{b})$$

(7) For $x \in A$: $V(x) = \phi \iff x$ enhet, $D(x) = \phi \iff x$ nilpotent

$V(x) = \operatorname{Spec} A \iff x$ nilpotent, $D(x) = \operatorname{Spec} A \iff x$ enhet

(8) For idealer $\underline{a}, \underline{b} \subseteq A$:

$$V(\underline{a}) = V(\underline{b}) \iff r(\underline{a}) = r(\underline{b}) \iff D(\underline{a}) = D(\underline{b})$$

Teorem 7 $\operatorname{Spec} A$ er et topologisk rom med Zariskitopologien, hvor de lukkede mengdene er $\{V(\underline{a}) \mid \underline{a} \subseteq A \text{ ideal}\}$, og de åpne mengdene er $\{D(\underline{a}) \mid \underline{a} \subseteq A \text{ ideal}\}$.

Bevis: Merknadene (4), (5), (6) $\square$

Merk: Basis for de åpne mengdene: $\{D(x) \mid x \in A\}$.

Oppgave: Vis følgende:

(1) Hvis $\underline{a} \subseteq A$ er et endeliggen ideal, så er $D(\underline{a})$ kompakt i underromstopologien. (spesielt er $\operatorname{Spec} A$ kompakt).
Hvis $\underline{a}$ ikke er endeliggen er $D(\underline{a})$ ikke kompakt.

(2) For $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ er $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$ (så de lukkede punktene er de maksimale idealene)

(3) $\operatorname{Spec} A$ er T_0, men ikke Hausdorff dersom $\exists$ to ulike $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ med $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$.

Ark: TFAE for et top rom X, som da kalles <u>irredusibelt</u>:

(1) Hvis $X = V_1 \cup V_2$ med V_i lukket, så er $V_1 = X$ eller $V_2 = X$

(2) $\phi \neq O \subseteq X$ åpen $\Rightarrow \bar{O} = X$

(3) $O_1 \neq \phi \neq O_2$ åpne $\Rightarrow O_1 \cap O_2 \neq \phi$

<u>Lemma 8</u> Enhver kommutativ ring har minimale primidealer.

Oppgave: Vis følgende.

(1) $\operatorname{Spec} A$ irredusibelt $\Leftrightarrow$ nullradikalet er et primideal

(2) $V \subseteq \operatorname{Spec} A$ lukket & irred $\Leftrightarrow V = V(\mathfrak{p})$ for et primideal $\mathfrak{p}$

(3) De maksimale irred undermengdene av $\operatorname{Spec} A$ er $\{V(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \text{ min}\}$

For en ringhom $\phi: A \to B$, se på $\phi^*: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ gitt ved $\phi^*(\mathfrak{q}) = \phi^{-1}($

For et ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ er

$$\begin{aligned}(\phi^*)^{-1}(D(\mathfrak{a})) &= \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \mid \phi^*(\mathfrak{q}) \in D(\mathfrak{a})\} \\ &= \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \mid \mathfrak{a} \nsubseteq \phi^{-1}(\mathfrak{q})\} \\ &= \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \mid \mathfrak{a}^e \nsubseteq \mathfrak{q}\} \\ &= D(\mathfrak{a}^e)\end{aligned}$$

så ϕ^* er kontinuerlig. Følgelig er Spec en kontravariant funktor

$$\operatorname{Spec}: \{\text{kommutative ringer}\} \longrightarrow \{\text{topologiske rom}\}$$

Oppgave: Vis følgende:

(1) Oppg 1.21, 1.22

(2) Oppg 1.23: TFAE:
(i) A har en idempotent $e \neq 0, 1$
(ii) $A \approx A_1 \times A_2$ hvor $A_i \neq 0$ ringer
(iii) $\operatorname{Spec} A$ ikke sammenhengende

(3) Oppg 1.26: X komp Hausdorff, $C(X) = \{f: X \to \mathbb{R} \mid f \text{ kont}\}$ (dette er en komm. ring, $\operatorname{Max} C(X) = \{\mathfrak{m} \subseteq C(X) \mid \mathfrak{m} \text{ max ideal}\}$ med Zariski-undertop. Da er $X \approx \operatorname{Max} C(X)$.

Def: Et top rom er <u>spektralt</u> dersom $\exists$ ring A med $X \approx \operatorname{Spec} A$.

Artikkel: M. Hochster: "Prime ideal structure in commutative rings," Trans. Amer. Math. Soc. 1969

Algebraisk geometri

k kropp og $A = k[x_1, \ldots, x_n]$, $k^n = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in k\}$

Def: (1) For en undermengde $S \subseteq A$: $V(S) = \{\alpha \in k^n \mid f(\alpha) = 0 \ \forall f(x) \in S\}$

(2) For en undermengde $T \subseteq k^n$: $I(T) = \{f(x) \in A \mid f(\alpha) = 0 \ \forall \alpha \in T\}$

Merk: (1) $V(S) = V(\langle S \rangle)$ og $V(\underline{a}) = V(r(\underline{a}))$ for alle idealer $\underline{a} \subseteq A$.

(2) $\underline{a} \subseteq \underline{b} \subseteq A \implies V(\underline{b}) \subseteq V(\underline{a})$

(3) For alle idealer $\underline{a} \subseteq A$ er $\underline{a} \subseteq r(\underline{a}) \subseteq IV(\underline{a})$.

<u>Hilberts Nullstellensatz</u>: hvis $k = \bar{k}$ er $r(\underline{a}) = IV(\underline{a})$. Skal kanskje ta med dette senere (Oppg 7.14).

(4) For alle delmengder $T \subseteq k^n$ er $T \subseteq VI(T)$. Hvis $T = V(\underline{a})$ for et ideal $\underline{a} \subseteq A$ er $T = VI(T)$.

(5) $V(\{0\}) = k^n$ og $V(A) = \emptyset$

(6) $\bigcap_{w \in \Omega} V(\underline{a}_w) = V\left(\sum_{w \in \Omega} \underline{a}_w\right)$ og $V(\underline{a}) \cup V(\underline{b}) = V(\underline{a}\,\underline{b})$

<u>Teorem 9</u> Med mengdene $V(\underline{a})$ ($\underline{a}$ ideal i A) som lukkede mengder (kalt <u>affine algebraiske mengder</u> eller <u>varieteter</u>) blir k^n et topologisk rom, skrevet $\mathbb{A}^n(k)$. Topologien kalles <u>Zariski-topologien</u>.

Eksempler: (1) $k = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}[x]$, $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$: $V(f) = \emptyset$

(2) $k = \mathbb{C}$, $A = \mathbb{C}[x]$, $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{C}[x]$: $V(f) = \{i, -i\}$

(3) $k = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}[x, y]$, $f(x, y) = y^2 + x^2 - 1$: