MA8202 Kommutativ algebra

I dette kurset: "ring" = kommutativ ring med $1 \neq 0$, ringhom sender 1 på 1.

Idealteori

La A være en ring.

Def: (1) Primideal: et ideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ med $\mathfrak{p} \neq A$ og slik at $ab \in \mathfrak{p} \Rightarrow a \in \mathfrak{p} \vee b \in \mathfrak{p}$

(2) Maksimalt ideal: et ideal $\mathfrak{m} \subseteq A$ med $\mathfrak{m} \neq A$ og ingen idealer $\mathfrak{a}$ med $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a} \subset A$ (ekte inkl).

Merk: (1) Følgende er ekv for et ideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ $(\mathfrak{p} \neq A)$:

(i) $\mathfrak{p}$ primideal.

(ii) For alle idealer $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$: $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \vee \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$

(for idealer $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \subseteq A$: $\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = \{ \underbrace{\sum a_1 \cdots a_n}_{\text{endelige summer}} \mid a_i \in \mathfrak{a}_i \}$ ideal)

(iii) $A/\mathfrak{p}$ integritetsområde.

(2) $\mathfrak{m} \subseteq A$ maksimalt ideal $\Leftrightarrow$ $A/\mathfrak{m}$ er en kropp

(3) Fra (1) og (2): $\mathfrak{m} \subseteq A$ maksimalt ideal $\Rightarrow$ $\mathfrak{m}$ primideal.

Teorem 1 A har minst ett maks ideal.

Bevis: Zorns lemma på $\{\mathfrak{a} \subseteq A \mid \mathfrak{a} \text{ ideal og } \mathfrak{a} \neq A\}$. $\square$

Korollar 2 Hvis $\mathfrak{a} \subset A$ er et ideal, så finnes et maks ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m} \subset A$.

Bevis: Bruk Teorem 1 på $A/\mathfrak{a}$ $\square$

Eksempel: Idealer i $\mathbb{Z}$ er på form (n) siden $\mathbb{Z}$ er en PID. Primidealer: (0) og (p), p primtall. Maks. idealer: (p), p primtall.

Hvis $n = p_1^{n_1} \cdots p_t^{n_t}$ er $(n) \subseteq (p_i)$ $\forall\, 1 \leq i \leq t$ og $(n) \not\subseteq (q)$ hvis q er et primtall ikke blant $p_1, \ldots, p_t$.

Merk: (1) A PID $\Rightarrow$ alle ikke-null primidealer er maksimale:

$0 \neq (p)$ primideal og $(p) \subseteq (a) \subseteq A$ $\Rightarrow$ $p = ab$ $\Rightarrow$ $ab \in (p)$

$\Rightarrow$ $a \in (p)$ eller $b \in (p)$ siden (p) primideal.

Hvis $a \in (p)$ er $(a) = (p)$, hvis $b \in (p)$ er $(a) = A$ (vis).

(2) A PID $\Rightarrow$ (p) primideal $\Leftrightarrow$ $p = 0 \vee p$ irredusibel

Def: A er lokal hvis den har bare ett maks ideal (semilokal hvis $< \infty$)

Proposisjon 3: Følgende er ekv for et ideal $\underline{m} \subseteq A$:

(1) $(A, \underline{m})$ lokal.

(2) $a \in A \setminus \underline{m} \Rightarrow a$ enhet.

(3) $\underline{m}$ er maksimalt og $1+a$ er en enhet $\forall a \in \underline{m}$

Eksempler: (1) k kropp $\Rightarrow k[x]$ PID, så de maksimale idealene er $(f(x))$, $f(x)$ irredusibel.

For $k = \bar{k}$: "eneste" irred er $\{x - \alpha \mid \alpha \in k\}$, så får bijeksjon

$$\{\text{maks idealer i } k[x]\} \longleftrightarrow k$$

For $k = \mathbb{R}$: de irred er $\{x - a \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{x^2 + bx + c \mid b^2 - 4c < 0\}$

(2) k kropp, se på potensrekkeringen

$$k[[x]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mid a_n \in k\}$$

Vis: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ er en enhet $\Leftrightarrow a_0 \neq 0$. Følgelig er $k[[x]]$ lokal med (x) som maks. ideal.

Def: (1) Nullradikalet til A er idealet $\underline{n} = \{a \in A \mid \exists\, t > 0 \text{ med } a^t = 0\}$ (vis ideal)

(2) Jacobsonradikalet til A (eller bare radikalet) er idealet $\underline{r} = \bigcap_{\underline{m} \text{ max id i } A} \underline{m}$

Merk: (1) a nilpotent $\Rightarrow a \in \underline{p}$ $\forall$ primidealer $\underline{p} \subseteq A$ $\Rightarrow \underline{n} \subseteq \bigcap_{\underline{p} \text{ prim i } A} \underline{p}$

(2) Spesielt er $\underline{n} \subseteq \underline{r}$.

(3) A er redusert dersom $\underline{n} = 0$. Merk at $A/\underline{n}$ er redusert.

Proposisjon 4 (1) $\underline{n} = \bigcap_{\underline{p} \text{ prim i } A} \underline{p}$

(2) $a \in \underline{r} \Leftrightarrow 1 + ab$ er en enhet $\forall\, b \in A$.

Bevis: Oppgave.

Eksempel: A PID med ∞ mange irred elementer (opp til enheter). Hvis $a \in \underline{r} = \bigcap_{\substack{p \text{ irred} \\ p \neq 0}} (p)$ så vil $p \mid a$ $\forall$ irredusible $p \neq 0$. Umulig siden A er en UFD. Derfor er $\underline{r} = 0$. Eksempel: $\mathbb{Z}$ og $k[x]$.

Oppgave: Hvordan avhenger $\underline{r}$ og $\underline{n}$ av n for $A = \mathbb{Z}/(n)$?

For idealer $\underline{a}, \underline{b} \subseteq A$ er $\underline{a}\underline{b} \subseteq \underline{a} \cap \underline{b}$ og $(\underline{a}+\underline{b})(\underline{a}\cap\underline{b}) \subseteq \underline{a}\underline{b}$. Så hvis $\underline{a}+\underline{b} = A$ (koprimiske) er da $\underline{a}\underline{b} = \underline{a}\cap\underline{b}$. Eksempel i $\mathbb{Z}$: $(4)\cdot(6) = (24)$ mens $(4)\cap(6) = (12)$.

<u>Proposisjon 5</u> La $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_t$ være idealer i A og $\phi : A \longrightarrow \prod_{i=1}^{t} A/\underline{a}_i = A/\underline{a}_1 \times \dots \times A/\underline{a}_t$

(1) $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_t$ parvis koprimiske $\Longrightarrow \prod_{i=1}^{t} \underline{a}_i = \bigcap_{i=1}^{t} \underline{a}_i$

(2) ϕ surj $\Longleftrightarrow \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_t$ parvis koprimiske (<u>kinesiske restteoremet</u>)

(3) ϕ inj $\Longleftrightarrow \bigcap_{i=1}^{t} \underline{a}_i = 0$

Bevis: Oppgave.

<u>Teorem 6</u> (Primunnvikelse - prime avoidance)

(1) $\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_t \subseteq A$ primidealer og $\underline{a} \subseteq A$ ideal med $\underline{a} \subseteq \bigcup_{i=1}^{t} \underline{p}_i \Longrightarrow \underline{a} \subseteq \underline{p}_i$ for en i

(2) $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_t \subseteq A$ idealer og $\underline{p} \subseteq A$ primideal med $\bigcap_{i=1}^{t} \underline{a}_i \subseteq \underline{p} \Longrightarrow \underline{a}_i \subseteq \underline{p}$ for en i. Spesielt: $\underline{p} = \bigcap_{i=1}^{t} \underline{a}_i \Longrightarrow \underline{p} = \underline{a}_i$ for en i.

Bevis: (1) Induksjon på t, $t=1$ trivielt. Anta ok for t, og at $\underline{a} \subseteq \bigcup_{i=1}^{t+1} \underline{p}_i$. Hvis $\exists\ j \in \{1, \dots, t+1\}$ med $\underline{a} \subseteq \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{t+1} \underline{p}_i$ så ok per induksjon, så anta ikke.

For alle $j \in \{1, \dots, t+1\}$ er da $\underline{a} \not\subseteq \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{t+1} \underline{p}_i$, så $\exists\ a_j \in \underline{a}$ med $a_j \notin \underline{p}_1, \dots, \underline{p}_{j-1}, \underline{p}_{j+1}, \dots, \underline{p}_{t+1}$. Siden $\underline{a} \subseteq \bigcup_{i=1}^{t+1} \underline{p}_i$ må da $a_j \in \underline{p}_j$. Elementet

$$a = \sum_{j=1}^{t+1} a_1 \cdots \hat{a}_j \cdots a_{t+1} = a_2 \cdots a_{t+1} + a_1 a_3 \cdots a_{t+1} + \cdots$$ ligger da i $\underline{a}$

men ikke i $\bigcup_{i=1}^{t+1} \underline{p}_i$, motsigelse.

(2) $\prod_{i=1}^{t} \underline{a}_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{t} \underline{a}_i$ $\square$

Flere begreper: (1) $\underline{a}, \underline{b} \subseteq A$ idealer: $(\underline{a} : \underline{b}) \overset{\text{def}}{=} \{a \in A \mid a\underline{b} \subseteq \underline{a}\}$ ideal i A

(2) $(0 : \underline{b}) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Ann}(\underline{b})$, for $a \in A$ er $(0 : a) \overset{\text{def}}{=} (0 : (a)) = \mathrm{Ann}(a)$.

(3) <u>Radikalet</u> til $\underline{a}$ er $r(\underline{a}) = \{a \in A \mid a^n \in \underline{a} \text{ for en } n \geq 1\}$

(ideal i A med $\underline{a} \subseteq r(\underline{a})$).

(4) $f : A \to B$ ring hom og $\underline{a} \subseteq A$, $\underline{b} \subseteq B$ idealer.

$\underline{a}^e \overset{\text{def}}{=}$ idealet i B gen av $f(\underline{a})$

$\underline{b}^c = f^{-1}(\underline{b})$ (ideal i A)

Egenskaper: Flere, f.eks $\underline{p} \subseteq B$ primideal $\Rightarrow f^{-1}(\underline{p})$ primideal i A.