Samling MA6201

13.09.2022

Likninger

Oppgave 1 Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} x + z &= 1 \\ 2x + 3y + 5z &= -1 \\ y + z &= -1 \end{aligned}$$

LF: $x = 1 - z$, $y = -1 - z$ hvor z er en fri variabel (kan være hva som helst).

Oppgave 2 Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} x + z &= 1 \\ 2x + 3y + 5z &= 0 \\ y + z &= 1 \end{aligned}$$

LF: Ingen løsning

Oppgave 3 Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} x + z &= 1 \\ x + y &= 1 \\ y + z &= 1 \end{aligned}$$

LF: $x = y = z = 1/2$

Oppgave 4 Hvor mange forskjellige løsnigner kan et lineært likningssystem ha? Kan du begrunne det geometrisk? Kan du begrunne det utifra radredusering? Diskuter med hverandre.

LF: Det er enten 0, 1 eller uendelig mange løsnigner.

Geometrisk svarer løsninger til skjæringer av linjer, plan, hyperplan, osv. Disse kan enten ikke skjære hverandre, skjære hverandre i et punkt, eller i en linje, et plan, et hyperplan osv.

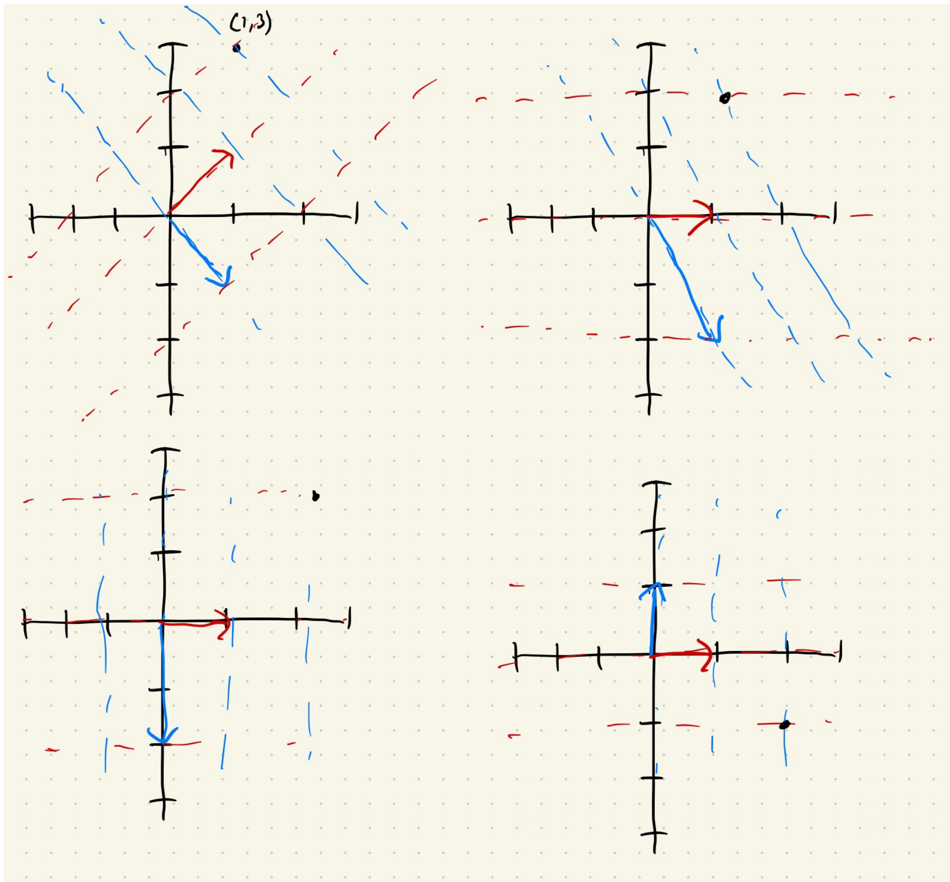
Når vi radreduserer kan vi ende opp med en rad som svarer til $0 = 1$. Da får vi ingen løsninger. Hvis vi ikke har noen slike rader, og alle kolonnene har en ledende ener vil vi få en unik løsning. I de resterende tilfellene vil vi få en fri variabel som gir oss uendelig mange løsninger.

Oppgave 5 Radreduser $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Etter hver radoperasjon tegn kolonnene i planet. Hva svarer radoperasjoner til geometrisk? Se på likningssystemet under, kan vi forstå løsningen vi får ved radreduksjon geometrisk?

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$

LF:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$



I det første steget skaper radoperasjonen en vridene tarnsformasjon, som endrer y-koordinatet til vektorer uten og endre x-koordinatet. Vi kan tenke på det som at y-aksen holdes fast, mens x-aksen roteres og resten av planet henger med.

I det andre steget gjør vi en tilsvarende vridning, men her er det x-koordinatet som endres.

I det siste steget så speiles planet om x-aksen og vi skaler ned med en halv i y-rettningen.

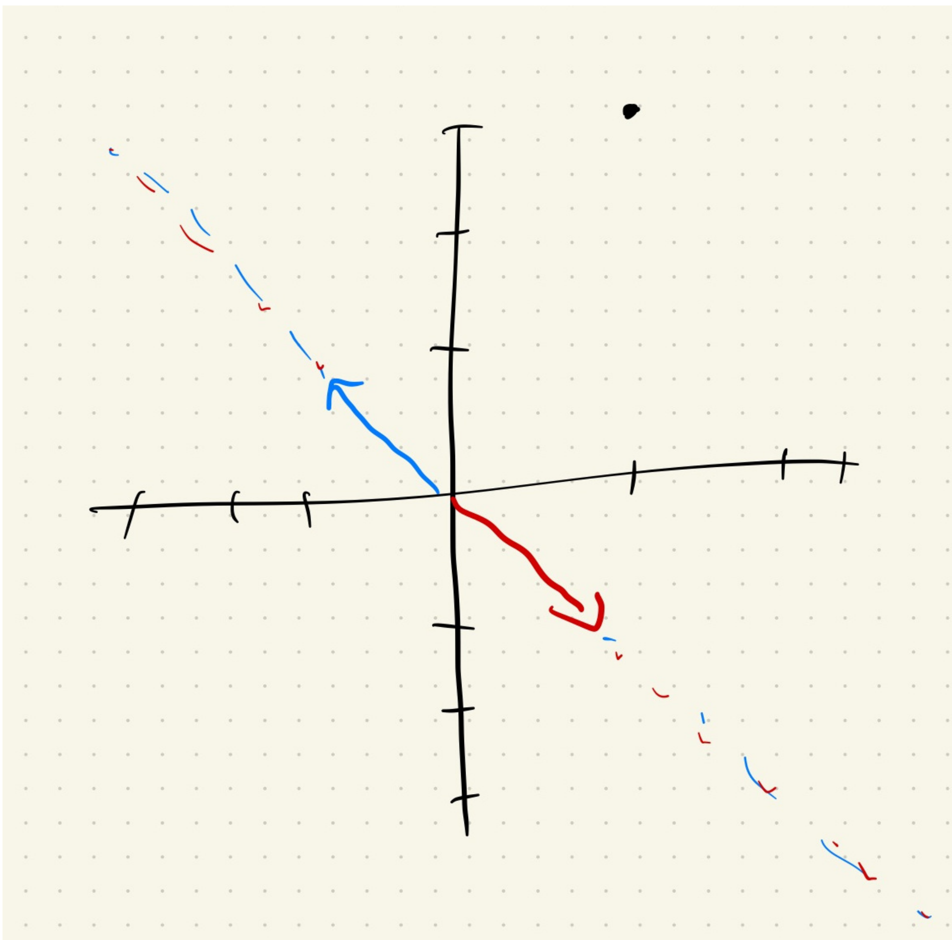
I alle disse stegene, ser vi hvordan "koordinatsystemet" definert av den rød og blå vektoren endres i takt og hvordan vektoren (1,3) flyttes til (2,-1) som blir løsningen.

Oppgave 6 Ta for deg matrisa $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Tegn kolonnene i planet. Kan du utifra tegningen din argumentere for at

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ -x + y &= 3 \end{aligned}$$

ikke har noen løsning?

LF:



Vi ser at ved å flytte oss langs den rød og blå vektoren vil vi aldri komme oss av linja de ligger på, og kan derfor ikke nå (1,3).

Matriser

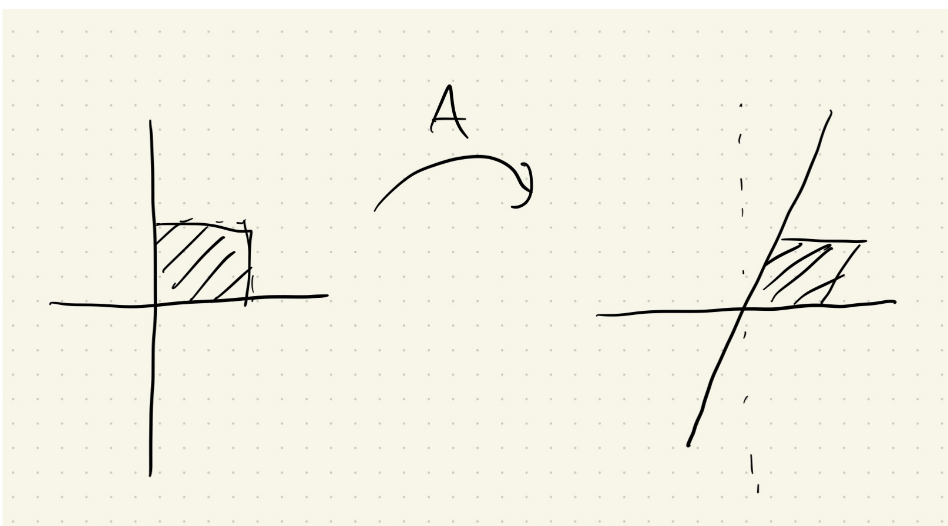
I denne seksjonen la A være matrisa $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, og la B være gitt ved $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Oppgave 7 Regn ut $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ for ulike verdier av x og y.

LF: $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ y \end{bmatrix}$. Plug inn dine favorittall for x og y.

Oppgave 8 Multiplikajson med A danner en funksjon $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Beskriv geometrisk hva funksjonen gjør.

LF: A holder x-aksen fast, men roterer y-aksen i en rar vridene bevegelse. Se illustrasjon:



Oppgave 9 Hva er BA? Kan du beskrive B geometrisk? Kan du beskrive BA geometrisk?

LF:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

B går fra planet inn til et plan i rommet. BA gjør det samme, men tarnsformerer planet først.

Oppgave 10 Finn inversen til A. Utifra hvordan du tolket A geometrisk, kan du forklare hva inversen gjør?

LF:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inversen til A reverserer det A gjør. Altså A^{-1} vrir y-aksen mot venstre.

Oppgave 11 Har B en inverse? Hvis ja kan du beskrive inversen geometrisk, hvis nei kan du gi et geometrisk argument for hvorfor ikke?

LF: B er ikke inverterbar, hvis BB^{-1} skal bli identiteten må bildet til B fylle hele rommet. Men bildet til B fyller bare et plan.

Oppgave 12 Hvis C og D er to invertible matriser, er CD også invertibel? Hvis ja hva er inversen, hvis nei finn et moteksempel.

LF: Vi har $(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$, fordi $CDD^{-1}C^{-1} = CC^{-1} = I$ og $D^{-1}C^{-1}CD = D^{-1}D = I$.

Oppgave 13 La C være en invertibel $n \times m$-matrise, la $\mathbf{b}$ være en gitt $n \times 1$ matrise og $\mathbf{x}$ en ukjent $m \times 1$-matrise. Betrakt liknignen

$$C\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

(a) Vis at $\mathbf{x} = C^{-1}\mathbf{b}$ er en løsning av likningen.

(b) Vis at $\mathbf{x} = C^{-1}\mathbf{b}$ er den eneste løsningen.

LF: Hvis vi plugger $\mathbf{x} = C^{-1}\mathbf{b}$ inn i likningen får vi

$$\begin{aligned} C\mathbf{C}^{-1}\mathbf{b} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

Så vi ser at dette er en løsning på likningen.

Hvis vi antar at $\mathbf{x}_0$ er en annen løsning av likningen får vi

$$\begin{aligned} C\mathbf{x}_0 &= \mathbf{b} \\ C^{-1}C\mathbf{x}_0 &= C^{-1}\mathbf{b} \\ x_0 &= C^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Altså er $\mathbf{x} = C^{-1}\mathbf{b}$ den eneste løsnignen.

Oppgave 14 Når vi løser en likning ved radreduksjon, i hvilke tilfeller er det vi får en unik løsning? Bruk dette sammen med forige oppgave for å argumentere for at kun kvadratiske matriser kan være invertible (dvs $n = m$ i oppgaven over).

LF: For at løsningen skal være unik, må vi ha en ledende ener i hver kolonne. Men for å garantere at vi alltid får en løsning, må vi ha en ledende ener i hver rad. Å ha en ledende ener i hver rad og hver kolonne er kun mulig hvis det er like mange rader som kolonner, så det er kun kvadratiske matriser som alltid har en unik løsning av likningen

$$C\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

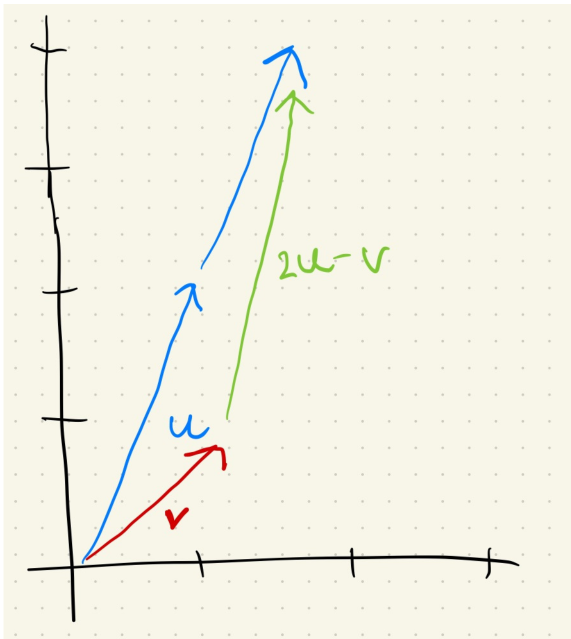
Siden inerterbare matriser har unik løsning, må de altså være kvadratiske.

Vektorer

Oppgave 15 La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Hva er $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$? Lag en tegning som illustrerer.

LF:

$$2\mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Oppgave 16 La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Finnes det a og b i $\mathbb{R}$ slik at

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} \tag{2}$$

LF: Vi kan skrive om likningen som

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Hvis vi setter opp den utvida matrisa og radreduserer får vi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Så løsningen er $a = 2$, $b = -1$.

Aksiomer for vektorrom La $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være i $\mathbb{R}^n$, og la a og b være i $\mathbb{R}$. Da er:

(a) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

(b) $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$

(c) Det finnes en vektor $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ slik at

$$\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u}$$

(d) Det finnes en $\mathbf{u}' \in \mathbb{R}^n$ slik at

$$\mathbf{u}+\mathbf{u}' = \mathbf{0}$$

(e) $a(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$

(f) $(a+b)\mathbf{u} = a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$

(g) $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$

(h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Oppgave 17 Bruk aksiomene over til å bevise følgende:

(i) $\mathbf{0}$ er unik. Dvs det finnes kun en vektor som oppfyller punkt (c).

(ii) $\mathbf{u}'$ er unik. Dvs det er kun en vektor slik at $\mathbf{u}+\mathbf{u}' = \mathbf{0}$.

(iii) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$

(iv) $(-1)\mathbf{u} = \mathbf{u}'$

(v) $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$

LF:

(i) Anta at $\mathbf{0}$ og $\mathbf{0}'$ begge oppfyller punkt (c). Da har vi at $\mathbf{0}+\mathbf{0}' = \mathbf{0}$ og $\mathbf{0}'+\mathbf{0} = \mathbf{0}'$. Men fra punkt (b) vet vi at $\mathbf{0}+\mathbf{0}' = \mathbf{0}'+\mathbf{0}$, så $\mathbf{0} = \mathbf{0}'$. Altså er $\mathbf{0}$ unik.

(ii) La $\mathbf{u}'$ og $\mathbf{u}''$ være to vektorer som oppfyller punkt (d). Vi tar for oss utrykket $\mathbf{u}' + \mathbf{u} + \mathbf{u}''$. Hvis vi evaluerer dette som

$$(\mathbf{u}' + \mathbf{u}) + \mathbf{u}'' = \mathbf{0} + \mathbf{u}''$$

kan vi ved hjelp av (b) og (c) se at dette blir $\mathbf{u}''$. Men ved hjelp av (a) er dette også likt

$$\mathbf{u}' + (\mathbf{u} + \mathbf{u}'') = \mathbf{u}' + \mathbf{0}$$

Som gir oss $\mathbf{u}'$. ALtså er $\mathbf{u}' = \mathbf{u}''$.

(iii) Ved hjelp av punkt (f) får vi at

$$0\mathbf{u} = (0+0)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}$$

fra (d) vet vi at det finnes en $\mathbf{v}$ slik at $0\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Legger vi det til på begge sider får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + 0\mathbf{u} &= \mathbf{v} + 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u} \\ \mathbf{0} &= \mathbf{0} + 0\mathbf{u} \\ \mathbf{0} &= 0\mathbf{u} \end{aligned}$$

(her har vi også brukt (a) og (b) gjennomgående)

(iv) Fra (iii) vet vi nå at $(1-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Bruker vi punkt (f) får vi at $1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Punkt (h) gir oss $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$, som betyr at $(-1)\mathbf{u}$ oppfyller punkt (d).

(v) Fra punkt (iii) vet vi at $\mathbf{0} = 0\mathbf{u}$, derfor er $a\mathbf{0} = a(0\mathbf{u})$ bruker vi (g) får vi $a(0\mathbf{u}) = (a \cdot 0)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Altså er $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Oppgave 18 La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tenk på linja utspent av $\mathbf{v}$, hvilken vektor på linja er nærmest $\mathbf{u}$? Denne vektoren kalles projeksjonen av $\mathbf{u}$ ned på $\mathbf{v}$.

LF: Linja utspent av $\mathbf{v}$ består av vektorer på formen $t\mathbf{v} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$. Den vektoren nærmest $\mathbf{u}$ er den hvor $\|\mathbf{u} - t\mathbf{v}\|^2 = (1-t)^2 + (2-t)^2$ er minst. Ved å derviere utrykket å sette lik 0, får vi $-2(1-t) - 2(2-t) = 0$ som gir $t = \frac{3}{2}$. Så projeksjonen av $\mathbf{u}$ ned på $\mathbf{v}$ er $\begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$.

Oppgave 19 La $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være som i forige oppgave, og la $\hat{\mathbf{u}}$ være projeksjonen du fant. Hva er $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$? Hva er $\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}$? Hva er $(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v}$?

LF:

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} = 3$, $(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v} = 0$.

Regneregler for prikkprodukt La $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være i $\mathbb{R}^n$, og la a og b være i $\mathbb{R}$. Da er:

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

(b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{w}$

(c) $a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v})$

(d) $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$, og $\|\mathbf{u}\| = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Oppgave 20 Vi ønsker å vise at projeksjonen av $\mathbf{u}$ ned på $\mathbf{v}$ er gitt ved $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$. Bruk regnereglene til prikkproduktet til å vise at for en hver $t \in \mathbb{R}$, så er

$$\|\mathbf{u} - t\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}\|^2 \geq 0$$

Konkluder deretter med at $\|\mathbf{u} - t\mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}\|$ og at derfor er $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$ projeksjonen av $\mathbf{u}$ ned på $\mathbf{v}$.

LF:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} - t\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} - t\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - t\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 2t\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + t^2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v}\|^2 &= \left(\mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v}\right) \cdot \left(\mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v}\right) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 2\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 2\frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\end{aligned}$$

Putter vi dette inn i det originale uttrykket får vi

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} - t\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v}\|^2 &= t^2\|\mathbf{v}\|^2 - 2t\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{v}\|^2} \\ &= \left(t\|\mathbf{v}\| - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Oppgave 21 (Utfording) La $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være to vektorer i $\mathbb{R}^2$, forskjellig fra 0. Vis at

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \leq 1.$$

Hint: Hvor mange røtter har polynomet $f(x) = \|x\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$?

LF:

$$\|x\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = x^2\|\mathbf{u}\|^2 + 2x\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2$$

Bruker vi abc formelen finner vi at røttene til f er

$$x = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2} \pm \sqrt{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2}$$

Når $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 = 0$ får vi en rot, når det er positivt for vi 2 reelle røtter og når det er negativt får vi ingen reelle røtter. Siden $f(x) = \|x\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2$ aldri er negativ kan den maks ha en reell rot. Derfor er $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 - \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 \leq 0$. Som vi kan skrive om til

$$\left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right| \leq 1.$$

Oppgave 22 Bruk forrige oppgave til å bevise trekantulikheten

$$\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$$

Hvorfor kalles dette trekantulikheten?

LF: Siden begge sider av ulikheten er positive er dette det samme som å vise

$$(\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 \geq \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2$$

Vi har $(\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$. Fra forrige oppgave får vi at dette er større enn

$$\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2$$

Grunnen til at det kalles trekantulikheten er at $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$, $\|\mathbf{u}\|$ og $\|\mathbf{v}\|$ kan tenkes på som lengdene til sidene i en trekant.

Oppgave 23 (Utfordring!) Istedenfor å se på $\mathbb{R}^n$ se på mengden av kontinuerlige funksjoner $[0,1] \to \mathbb{R}$. Sjekk at disse fortsatt oppfyller alle "aksiomene for vektorrom".

Sjekk at $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ oppfyller alle regnereglene for prikkprodukt.

Symmetriske matriser

Definisjon La $A = (a_{ij})$ være en $m \times n$-matrise. Da er den transponerte til A definert til å være $n \times m$-matrisa $A^T = (a_{ji})$.

For eksempel har vi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Oppgave 24 Hvis $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er to kolonnevektorer ($n \times 1$-matriser), utrykk prikkproduktet $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ved hjelp av den transponerte og matrisemultiplikasjon.

LF: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$

Oppgave 25 La $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Regn ut $(AB)^T$, $A^T B^T$ og $B^T A^T$.

LF:

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A^T B^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 26 Vis at $(AB)^T = B^T A^T$.

Hint: Hvis $r_i(A)$ betegner den i-te raden i A og $c_j(B)$ betegner den j-te kolonnen i B så er $AB = (r_i(A) \cdot c_j(B))$.

LF: Vi har at element (i,j) i AB er $r_i(A) \cdot c_j(B)$. Derfor er element (i,j) i $(AB)^T$ gitt ved $r_j(A) \cdot c_i(B)$.

Element (i,j) i $B^T A^T$ er $r_i(B^T) \cdot c_j(A^t) = c_i(B) \cdot r_j(A)$. Derfor har de to matrisene samme elemnter, og er like.

Definisjon En matrise kalles symmetrisk hvis $A^T = A$.

Oppgave 27 Bruk forrige oppgave til å vise at hvis A er en matrise så er $A^T A$ symmetrisk.

LF: $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$, så $A^T A$ er symmetrisk.

Oppgave 28 La $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ og la $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Beregn prikkproduktene $A^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ og $\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}$. Hva er sammenhengen? Kan du si noe generelt?

LF: $A^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = 7$. Vi ser at begge er like.

Generelt så er $A^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (A^T \mathbf{u})^T \mathbf{v} = \mathbf{u}^T A \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}$.