Samling MA6201

13.09.2022

Likninger

Oppgave 1 Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} x + z &= 1 \\ 2x + 3y + 5z &= -1 \\ y + z &= -1 \end{aligned}$$

Oppgave 2 Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} x + z &= 1 \\ 2x + 3y + 5z &= 0 \\ y + z &= 1 \end{aligned}$$

Oppgave 3 Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} x + z &= 1 \\ x + y &= 1 \\ y + z &= 1 \end{aligned}$$

Oppgave 4 Hvor mange forskjellige løsnigner kan et lineært likningssystem ha? Kan du begrunne det geometrisk? Kan du begrunne det utifra radredusering? Diskuter med hverandre.

Oppgave 5 Radreduser $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Etter hver radoperasjon tegn kolonnene i planet. Hva svarer radoperasjoner til geometrisk? Se på likningssystemet under, kan vi forstå løsningen vi får ved radreduksjon geometrisk?

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$

Oppgave 6 Ta for deg matrisa $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Tegn kolonnene i planet. Kan du utifra tegningen din argumentere for at

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ -x + y &= 3 \end{aligned}$$

ikke har noen løsning?

Matriser

I denne seksjonen la A være matrisa $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, og la B være gitt ved $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Oppgave 7 Regn ut $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ for ulike verdier av x og y.

Oppgave 8 Multiplikajson med A danner en funksjon $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Beskriv geometrisk hva funksjonen gjør.

Oppgave 9 Hva er BA? Kan du beskrive B geometrisk? Kan du beskrive BA geometrisk?

Oppgave 10 Finn inversen til A. Utifra hvordan du tolket A geometrisk, kan du forklare hva inversen gjør?

Oppgave 11 Har B en inverse? Hvis ja kan du beskrive inversen geometrisk, hvis nei kan du gi et geometrisk argument for hvorfor ikke?

Oppgave 12 Hvis C og D er to invertible matriser, er CD også invertibel? Hvis ja hva er inversen, hvis nei finn et moteksempel.

Oppgave 13 La C være en invertibel $n \times m$-matrise, la $\mathbf{b}$ være en gitt $n \times 1$ matrise og $\mathbf{x}$ en ukjent $m \times 1$-matrise. Betrakt liknignen

$$C\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

(a) Vis at $\mathbf{x} = C^{-1}\mathbf{b}$ er en løsning av likningen.

(b) Vis at $\mathbf{x} = C^{-1}\mathbf{b}$ er den eneste løsningen.

Oppgave 14 Når vi løser en likning ved radreduksjon, i hvilke tilfeller er det vi får en unik løsning? Bruk dette sammen med forige oppgave for å argumentere for at kun kvadratiske matriser kan være invertible (dvs $n = m$ i oppgaven over).

Vektorer

Oppgave 15 La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Hva er $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$? Lag en tegning som illustrerer.

Oppgave 16 La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Finnes det a og b i $\mathbb{R}$ slik at

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Aksiomer for vektorrom La $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være i $\mathbb{R}^n$, og la a og b være i $\mathbb{R}$. Da er:

(a) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(b) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(c) Det finnes en vektor $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ slik at

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$$

(d) Det finnes en $\mathbf{u}' \in \mathbb{R}^n$ slik at

$$\mathbf{u} + \mathbf{u}' = \mathbf{0}$$

(e) $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$

(f) $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$

(g) $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$

(h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Oppgave 17 Bruk aksiomene over til å bevise følgende:

(i) $\mathbf{0}$ er unik. Dvs det finnes kun en vektor som oppfyller punkt (c).

(ii) $\mathbf{u}'$ er unik. Dvs det er kun en vektor slik at $\mathbf{u} + \mathbf{u}' = \mathbf{0}$.

(iii) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$

(iv) $(-1)\mathbf{u} = \mathbf{u}'$

(v) $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$

Oppgave 18 La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tenk på linja utspent av $\mathbf{v}$, hvilken vektor på linja er nærmest $\mathbf{u}$? Denne vektoren kalles projeksjonen av $\mathbf{u}$ ned på $\mathbf{v}$.

Oppgave 19 La $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være som i forige oppgave, og la $\hat{\mathbf{u}}$ være projeksjonen du fant. Hva er $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$? Hva er $\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}$? Hva er $(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v}$?

Regneregler for prikkprodukt La $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være i $\mathbb{R}^n$, og la a og b være i $\mathbb{R}$. Da er:

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

(b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{w}$

(c) $a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v})$

(d) $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$, og $\|\mathbf{u}\| = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Oppgave 20 Vi ønsker å vise at projeksjonen av $\mathbf{u}$ ned på $\mathbf{v}$ er gitt ved $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}$. Bruk regnereglene til prikkproduktet til å vise at for en hver $t \in \mathbb{R}$, så er

$$\|\mathbf{u} - t\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}\|^2 \geq 0$$

Konkluder deretter med at $\|\mathbf{u} - t\mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}\|$ og at derfor er $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}$ projeksjonen av $\mathbf{u}$ ned på $\mathbf{v}$.

Oppgave 21 (Utfording) La $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være to vektorer i $\mathbb{R}^2$, forskjellig fra 0. Vis at

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \leq 1.$$

Hint: Hvor mange røtter har polynomet $f(x) = \|x\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$?

Oppgave 22 Bruk forrige oppgave til å bevise trekantulikheten

$$\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$$

Hvorfor kalles dette trekantulikheten?

Oppgave 23 (Utfordring!) Istedenfor å se på $\mathbb{R}^n$ se på mengden av kontinuerlige funksjoner $[0, 1] \to \mathbb{R}$. Sjekk at disse fortsatt oppfyller alle "aksiomene for vektorrom".

Sjekk at $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ oppfyller alle regnereglene for prikkprodukt.

Symmetriske matriser

Definisjon La $A = (a_{ij})$ være en $m \times n$-matrise. Da er den transponerte til A definert til å være $n \times m$-matrisa $A^T = (a_{ji})$.

For eksempel har vi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Oppgave 24 Hvis $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er to kolonnevektorer ($n \times 1$-matriser), utrykk prikkproduktet $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ ved hjelp av den transponerte og matrisemultiplikasjon.

Oppgave 25 La $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Regn ut $(AB)^T$, $A^T B^T$ og $B^T A^T$.

Oppgave 26 Vis at $(AB)^T = B^T A^T$.

Hint: Hvis $r_i(A)$ betegner den i-te raden i A og $c_j(B)$ betegner den j-te kolonnen i B så er $AB = (r_i(A) \cdot c_j(B))$.

Definisjon En matrise kalles symmetrisk hvis $A^T = A$.

Oppgave 27 Bruk forrige oppgave til å vise at hvis A er en matrise så er $A^T A$ symmetrisk.

Oppgave 28 La $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ og la $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Beregn prikkproduktene $A^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ og $\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}$. Hva er sammenhengen? Kan du si noe generelt?