

MA6101 Grunnkurs i analyse 1

Prosjekt Høst 2023

Innleveringsfrist: Onsdag 8. November, kl. 13:00

Prosjektet leveres som PDF i Inspira på enten Engelsk eller Norsk. Dere kan jobbe i par eller alene. Instruksjoner for innlevering: Gruppeinnlevering+i+Inspira. Hvis du leverer individuelt, må du være i en gruppe for deg selv. Skriv også ditt/deres kandidatnummer på toppen av dokumentet som du leverer inn.

Prosjektet er obligatorisk og teller 30% av karakteren i emnet. Dere skal svare på tre oppgaver. To av dem kan dere selv velge blant oppgave 1–4, mens alle må gjøre oppgave 5.

Legg frem rigorøse argumenter/utledninger. Tenk at du forklarer løsningene/begrepene for noen som kan matematikk, men ikke temaene du legger frem. Henviser du til resultater som er gitt i boken eller i forelesning, må dette spesifiseres.

Velg to av oppgavene 1–4.

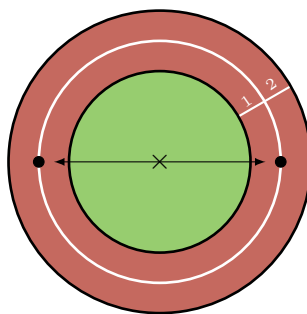
1

- a) La $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ være en kontinuerlig funksjon. Vis at det finnes en $c \in [0, 1]$ slik at $f(c) = c$.

Hint: Se på funksjonen $g(x) = x - f(x)$.

- b) Du skal løpe én gang rundt en sirkulær bane. Vi antar at farten er null idet du starter og idet du går i mål. Vis at det alltid vil finnes to diametralt motsatte punkter i banen hvor farten er like stor.

Merk: Farten er en kontinuerlig funksjon.



Figur: Diametralt motsatte punkter.

2

- a) La f være en funksjon som er kontinuert i $[a, b]$, to ganger deriverbar på (a, b) , og der

$$f(a) = f(d) = f(b) = 0$$

for en $d \in (a, b)$. Vis at det da finnes en $c \in (a, b)$ slik at $f''(c) = 0$.

- b) Anta at f er kontinuert i $[a, b]$, to ganger deriverbar i (a, b) og f'' har nøyaktig ett nullpunkt i (a, b) . Vis at $f(x)$ kan ha maksimalt tre nullpunkter i $[a, b]$.

3

Vi ser på funksjonen definert ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{hvis } x \neq 0 \\ 0, & \text{hvis } x = 0. \end{cases}$$

Knut har avgjort at f ikke har en derivert for $x = 0$. Argumentasjonen hans står oppført under.

- a) Forklar hvorfor argumentasjonen til Knut ikke er gyldig.
 b) Avgjør om $f'(0)$ eksisterer. Gi enten et gyldig argument for at den ikke eksisterer eller finn $f'(0)$.

Knut sitt argument

Vi finner ved regneregler for den deriverte at

$$f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

for $x \neq 0$. For å bestemme $f'(0)$ ser vi på $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. Vi observerer at

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

samt at $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ikke eksisterer. Generelt har vi at hvis

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

eksisterer, men

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x)$$

ikke eksisterer, så vil ikke $\lim_{x \rightarrow a} (g(x) + h(x))$ eksistere. Dermed konkluderer vi med at $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ ikke eksisterer, og da heller ikke $f'(0)$.

- c) Bestem om følgende utsagn er riktig: Dersom f er deriverbar i et åpent intervall (a, b) , og strengt avtagende i dette intervallet, så må $f'(x) < 0$ for alle x i intervallet. Gi et bevis eller moteksempel.

4

En holme ligger 6 km fra strandkanten. 9 km fra det punktet på stranden som er nærmest holmen, ligger det en hytte. Hvis man ror med en fart av 3 km/t og går med en fart av 5 km/t, hva er den korteste tiden man kan bruke fra holmen til hytta?

Husk: Et gyldig svar må inkludere argumentasjon for hvorfor fremgangsmåten din gir korrekt svar.



Figur: Illustrasjon av hytta og holmen.

Siste oppgave obligatorisk.

- 5 Identifiser tre matematiske begrep/resultater du har benyttet mens du løste de første oppgavene. Skriv en kort forklaring av dem og illustrer det med enkle eksempler.

Potensielle begrep:

- Grenseverdi
- Kontinuitet
- Derivert
- Maksimal-/ekstremalverdier
- Asymptoter

Potensielle resultat:

- Skvisregelen
- Kjernerregelen
- Ekstremalverdisetningen
- Middelvei-setningen
- Rolles teorem
- Skjæringssetningen

Merk

Listen over er ikke absolutt. Dere kan velge andre begrep/resultater fra faget så lenge dere har brukt dem og dere forklarer dem godt. Sjekk eventuelt <https://wiki.math.ntnu.no/ma1101/2023h/tema> for flere begrep/temaer fra faget.