



1 La \mathcal{A} være en additiv kategori, og $A, B \in \mathcal{A}$.

- a) Vis at nullobjektet er unikt.
b) Vis at $0 \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ er komposisjonen

$$A \longrightarrow 0 \longrightarrow B$$

og at $A = 0$ hvis og bare hvis $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A) = \{0\}$.

- c) Vis at i biproduktdiagrammet

$$\begin{array}{ccc} & i_A & \\ A & \xrightarrow{\quad} & A \oplus B \\ & \pi_A & \\ & i_B & \\ & \xleftarrow{\quad} & B \\ & \pi_B & \end{array}$$

er $\pi_A \circ i_B = 0$ og $\pi_B \circ i_A = 0$. (Forøvrig, er det riktig å slå sammen disse to likhetene og skrive $\pi_A \circ i_B = 0 = \pi_B \circ i_A$ i stedet?) Vis at biproduktet er både et koprodukt og et produkt.

- d) For A og B har vi også biproduktdiagrammer

$$\begin{array}{ccc} & i_A^1 & \\ A & \xrightarrow{\quad} & A \oplus A \\ & \pi_A^1 & \\ & i_A^2 & \\ & \xleftarrow{\quad} & A \\ & \pi_A^2 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & i_B^1 & \\ B & \xrightarrow{\quad} & B \oplus B \\ & \pi_B^1 & \\ & i_B^2 & \\ & \xleftarrow{\quad} & B \\ & \pi_B^2 & \end{array}$$

Produktegenskapen til $A \oplus A$ og koproduktegenskapen til $B \oplus B$ gir da morfier Δ_A og ∇_B i kommutative diagrammer

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ & \swarrow 1 & \searrow 1 \\ A & \xleftarrow{\pi_A^1} & A \oplus A & \xrightarrow{\pi_A^2} & A \\ & \downarrow \Delta_A & & & \\ & A & & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & B & \\ & \swarrow 1 & \searrow 1 \\ B & \xrightarrow{i_B^1} & B \oplus B & \xleftarrow{i_B^2} & B \\ & \uparrow \nabla_B & & & \end{array}$$

Ta nå to morfier $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$. Koproduktegenskapen til $A \oplus A$ gir da en morfi $h_{f,g}$ i et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccc} & B \oplus B & \\ & \swarrow i_B^1 \circ f & \searrow i_B^2 \circ g \\ A & \xrightarrow{i_A^1} & A \oplus A & \xleftarrow{i_A^2} & A \\ & \downarrow h_{f,g} & & & \end{array}$$

(med matrisenotasjon er $h_{f,g} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$). Vis at $f + g = \nabla_B \circ h_{f,g} \circ \Delta_A$.

2 La \mathcal{A} og \mathcal{B} være additive kategorier.

- a) En funktor $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ er additiv dersom $F(f + g) = F(f) + F(g)$ for alle $A, B \in \mathcal{A}$ og $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$. Vis at F da bevarer nulobjektet og biproduktdiagram (så F bevarer all additiv struktur).
- b) Vis motsatt at dersom en funktor $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ bevarer biproduktdiagram, så er den additiv (hint: 1d).

3 Vis at $\text{Mod } R$ er en abelsk kategori for enhver ring R .

4 La \mathcal{A} være en abelsk kategori, og anta vi er gitt objekter og morfier

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

- a) Vis at dersom $g \circ f$ er mono, så er f mono, og at dersom $g \circ f$ er epi, så er g epi.
- b) Vis at dersom f og g er mono, så er $g \circ f$ mono, og at dersom f og g er epi, så er $g \circ f$ epi.
- c) Anta nå at f er epi, og betrakt «dekomponeringsdiagrammene» for henholdsvis g og $g \circ f$:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } g & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{p} & \text{Coker } g \\ & & \downarrow p_i & & \uparrow i_p & & \\ & & \text{Coim } g & \xrightarrow{\bar{g}} & \text{Im } g & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker}(g \circ f) & \xrightarrow{j} & A & \xrightarrow{g \circ f} & C & \xrightarrow{\pi} & \text{Coker}(g \circ f) \\ & & \downarrow \pi_j & & \uparrow j_\pi & & \\ & & \text{Coim}(g \circ f) & \xrightarrow{\overline{g \circ f}} & \text{Im}(g \circ f) & & \end{array}$$

Vis at $p \circ j_\pi = 0$ og $\pi \circ i_p = 0$, og at det derfor finnes unike morfier h og h' som får diagrammene

$$\begin{array}{ccc} \text{Im}(g \circ f) & & \text{Im } g \\ \downarrow h & \searrow j_\pi & \downarrow i_p \\ \text{Im } g & \xrightarrow{i_p} & C \xrightarrow{p} \text{Coker } g \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Im } g & & \text{Im}(g \circ f) \\ \downarrow h' & \searrow j_\pi & \downarrow i_p \\ \text{Im}(g \circ f) & \xrightarrow{j_\pi} & C \xrightarrow{\pi} \text{Coker}(g \circ f) \end{array}$$

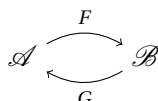
til å kommutere. Konkluder at h og h' er inverse isomorfier, slik at $\text{Im}(g \circ f) \simeq \text{Im } g$.

- d) Vis tilsvarende at dersom g er mono, så er $\text{Ker}(g \circ f) \simeq \text{Ker } f$.

5 Vis Slangelemmaet for modulkategorier.

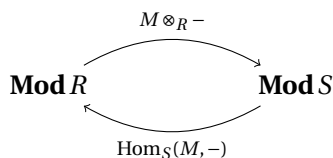
- 6 Diagramjakt er moro: vis punkt 2 i 5-lemmaet for modul kategorier.
- 7 a) Fullfør beviset for Lemma 11: vis at for ethvert objekt X (i en abelsk kategori \mathcal{A}) er den kontravariante Hom-funktoren $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, X)$ venstre eksakt.
 b) Fullfør beviset for Lemma 12: vis at et objekt I (i en abelsk kategori \mathcal{A}) er injektivt hvis og bare hvis $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, I)$ er eksakt.
- 8 a) Vis at \mathbb{Z} ikke er en *selvinjektiv* ring, altså injektiv som en modul over seg selv. For hvilke $n \geq 0$ er $\mathbb{Z}/(n)$ en injektiv \mathbb{Z} -modul?
 b) Finn ut hva *Baers kriterium* er for noe, og bruk dette til å vise at de to \mathbb{Z} -modulene \mathbb{Q} og \mathbb{Q}/\mathbb{Z} er injektive.
 c) Bruk Baers kriterium til å vise at for alle $n \geq 2$ er $\mathbb{Z}/(n)$ en selvinjektiv ring (dette kan vi også generalisere til en PID).
- 9 La R være en PID. Vis at enhver endeliggenerert projektiv R -modul er fri (det er faktisk sant for alle projektive R -moduler). Hint: strukturteoremet for endeliggenererte R -moduler. Konsekvens: enhver endeliggenerert projektiv modul over \mathbb{Z} eller en polynomring $k[x]$ (hvor k er en kropp) er fri.
- 10 a) Vis at i en additiv kategori så er en kjerne en pullback, mens en kokjerne er en pushout.

b) La



være abelske kategorier og additive funktorer slik at (F, G) danner et adjungert par (det kan faktisk vises at både F og G må være additive når de danner et adjungert par). Vis at F er høyre eksakt (tilsvarende er G venstre eksakt).

- c) La R og S være to ringer, og ${}_S M_R$ en S - R -bimodul. For $N \in \mathbf{Mod} R$ blir da $M \otimes_R N$ en venstre S -modul på en naturlig måte, mens for $L \in \mathbf{Mod} S$ blir $\text{Hom}_S(M, L)$ en venstre R -modul på en (litt mindre) naturlig måte (det er bare én måte å gjøre det på). Så vi har altså additive funktorer



Vis at $M \otimes_R -$ er høyre eksakt, mens $\text{Hom}_S(M, -)$ er venstre eksakt.

- d) La R og S være ringer, ${}_S P_R$ en S - R -bimodul, og $Q \in \mathbf{Mod} R$. Vis at dersom Q er projektiv, og P er projektiv som en venstre S -modul, så er den venstre S -modulen $P \otimes_R Q$ også projektiv. Spesielt, hvis P og Q er projektive moduler over en kommutativ ring R , så er $P \otimes_R Q$ også projektiv.

- 11 a) La R være en ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ et høyre ideal og $M \in \mathbf{Mod} R$. Vis at $R/\mathfrak{a} \otimes_R M$ er isomorf med $M/\mathfrak{a}M$ som abelsk gruppe. Dette kan enten vises ved å konstruere en spesifikk isomorfi, men det er også en god ide å kombinere en del av teknikkene/resultatene vi har vært gjennom, som følger. Vis først at vi har et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathfrak{a} \otimes_R M & \longrightarrow & R \otimes_R M & \longrightarrow & R/\mathfrak{a} \otimes_R M & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \lambda & & \downarrow \mu & & \downarrow \psi & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathfrak{a}M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/\mathfrak{a}M \longrightarrow 0
 \end{array}$$

med eksakte rader, med λ surjektiv og μ en isomorfi. Vis så at vi får en ψ som passer inn, og bruk så Slangelemmaet.

- b) Vis at $\mathbb{Z}/(m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n)$ er isomorf med $\mathbb{Z}/(d)$, hvor $d = \gcd(m, n)$. Altså er tensorproduktet null hvis og bare hvis...?
- 12 Her er en liten ekspedisjon et lite stykke bort fra kurset vårt, for de spesielt interesserte. I hierarkiet mellom de additive og de abelske kategoriene finner vi de såkalte *eksakte* kategoriene, definert av Quillen da han arbeidet med det som kalles K -teori. I disse kategoriene har vi også kort-eksakte følger (slik vi har i abelske kategorier), derav navnet. Man kan definere disse kategoriene som *ekstensjonslukkede* underkategorier av abelske kategorier, men også direkte ved hjelp av en liste med aksiomer.
- Se litt på «aksiomdefinisjonen» av eksakte kategorier. For en ring R , finn noen eksakte kategorier ved å se på $\mathbf{Mod} R$.