# MA3204 Homologisk algebra
# Høst 2021

## Øving 2

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

$\boxed{1}$ La $\mathscr{A}$ være en additiv kategori, og $A, B \in \mathscr{A}$.

**a)** Vis at nullobjektet er unikt.

**b)** Vis at $0 \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ er komposisjonen

$$A \longrightarrow 0 \longrightarrow B$$

og at $A = 0$ hvis og bare hvis $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A) = \{0\}$.

**c)** Vis at i biproduktdiagrammet

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "i_A"] & A \oplus B \arrow[l, bend left, "\pi_A"] \arrow[r, bend right, "\pi_B"'] & B \arrow[l, bend right, "i_B"']
\end{tikzcd}$$

er $\pi_A \circ i_B = 0$ og $\pi_B \circ i_A = 0$. (Forøvrig, er det riktig å slå sammen disse to likhetene og skrive $\pi_A \circ i_B = 0 = \pi_B \circ i_A$ i stedet?) Vis at biproduktet er både et koprodukt og et produkt.

**d)** For $A$ og $B$ har vi også biproduktdiagrammer

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "i_A^1"] & A \oplus A \arrow[l, bend left, "\pi_A^1"] \arrow[r, bend right, "\pi_A^2"'] & A \arrow[l, bend right, "i_A^2"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, bend left, "i_B^1"] & B \oplus B \arrow[l, bend left, "\pi_B^1"] \arrow[r, bend right, "\pi_B^2"'] & B \arrow[l, bend right, "i_B^2"']
\end{tikzcd}$$

Produktegenskapen til $A \oplus A$ og koproduktegenskapen til $B \oplus B$ gir da morfier $\Delta_A$ og $\nabla_B$ i kommutative diagrammer

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, bend right, "1"'] \arrow[d, dashed, "\Delta_A"] \arrow[dr, bend left, "1"] & \\
A & A \oplus A \arrow[l, "\pi_A^1"'] \arrow[r, "\pi_A^2"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & B & \\
B \arrow[ur, bend left, "1"] \arrow[r, "i_B^1"] & B \oplus B \arrow[u, dashed, "\nabla_B"'] & B \arrow[ul, bend right, "1"'] \arrow[l, "i_B^2"']
\end{tikzcd}$$

Ta nå to morfier $f, g \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$. Koproduktegenskapen til $A \oplus A$ gir da en morfi $h_{f,g}$ i et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd}
 & B \oplus B & \\
A \arrow[ur, bend left, "i_B^1 \circ f"] \arrow[r, "i_A^1"] & A \oplus A \arrow[u, dashed, "h_{f,g}"'] & A \arrow[ul, bend right, "i_B^2 \circ g"'] \arrow[l, "i_A^2"']
\end{tikzcd}$$

(med matrisenotasjon er $h_{f,g} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$). Vis at $f + g = \nabla_B \circ h_{f,g} \circ \Delta_A$.

**2** La $\mathscr{A}$ og $\mathscr{B}$ være additive kategorier.

**a)** En funktor $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ er additiv dersom $F(f+g) = F(f) + F(g)$ for alle $A, B \in \mathscr{A}$ og $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$. Vis at $F$ da bevarer nullobjektet og biproduktdiagram (så $F$ bevarer all additiv struktur).

**b)** Vis motsatt at dersom en funktor $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ bevarer biproduktdiagram, så er den additiv (hint: 1d).

**3** Vis at $\mathbf{Mod}\,R$ er en abelsk kategori for enhver ring $R$.

**4** La $\mathscr{A}$ være en abelsk kategori, og anta vi er gitt objekter og morfier

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

**a)** Vis at dersom $g \circ f$ er mono, så er $f$ mono, og at dersom $g \circ f$ er epi, så er $g$ epi.

**b)** Vis at dersom $f$ og $g$ er mono, så er $g \circ f$ mono, og at dersom $f$ og $g$ er epi, så er $g \circ f$ epi.

**c)** Anta nå at $f$ er epi, og betrakt «dekomponeringsdiagrammene» for henholdsvis $g$ og $g \circ f$:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} g \arrow[r, tail, "i"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, two heads, "p_i"] & C \arrow[r, two heads, "p"] & \operatorname{Coker} g \\
& \operatorname{Coim} g \arrow[r, "\overline{g}"] & \operatorname{Im} g \arrow[u, tail, "i_p"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}(g \circ f) \arrow[r, tail, "j"] & A \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, two heads, "\pi_j"] & C \arrow[r, two heads, "\pi"] & \operatorname{Coker}(g \circ f) \\
& \operatorname{Coim}(g \circ f) \arrow[r, "\overline{g \circ f}"] & \operatorname{Im}(g \circ f) \arrow[u, tail, "j_\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

Vis at $p \circ j_\pi = 0$ og $\pi \circ i_p = 0$, og at det derfor finnes unike morfier $h$ og $h'$ som får diagrammene

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Im}(g \circ f) \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, tail, "j_\pi"] & & \\
\operatorname{Im} g \arrow[r, tail, "i_p"] & C \arrow[r, two heads, "p"] & \operatorname{Coker} g
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\operatorname{Im} g \arrow[d, dashed, "h'"] \arrow[dr, tail, "i_p"] & & \\
\operatorname{Im}(g \circ f) \arrow[r, tail, "j_\pi"] & C \arrow[r, two heads, "\pi"] & \operatorname{Coker}(g \circ f)
\end{tikzcd}$$

til å kommutere. Konkluder at $h$ og $h'$ er inverse isomorfier, slik at $\operatorname{Im}(g \circ f) \simeq \operatorname{Im} g$.

**d)** Vis tilsvarende at dersom $g$ er mono, så er $\operatorname{Ker}(g \circ f) \simeq \operatorname{Ker} f$.

**5** Vis Slangelemmaet for modulkategorier.

$\boxed{6}$ Diagramjakt er moro: vis punkt 2 i 5-lemmaet for modulkategorier.

$\boxed{7}$

**a)** Fullfør beviset for Lemma 11: vis at for ethvert objekt $X$ (i en abelsk kategori $\mathscr{A}$) er den kontravariante Hom-funktoren $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(-, X)$ venstre eksakt.

**b)** Fullfør beviset for Lemma 12: vis at et objekt $I$ (i en abelsk kategori $\mathscr{A}$) er injektivt hvis og bare hvis $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(-, I)$ er eksakt.

$\boxed{8}$

**a)** Vis at $\mathbb{Z}$ ikke er en *selvinjektiv* ring, altså injektiv som en modul over seg selv. For hvilke $n \geq 0$ er $\mathbb{Z}/(n)$ en injektiv $\mathbb{Z}$-modul?

**b)** Finn ut hva *Baers kriterium* er for noe, og bruk dette til å vise at de to $\mathbb{Z}$-modulene $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ er injektive.

**c)** Bruk Baers kriterium til å vise at for alle $n \geq 2$ er $\mathbb{Z}/(n)$ en selvinjektiv ring (dette kan vi også generalisere til en PID).

$\boxed{9}$ La $R$ være en PID. Vis at enhver endeliggenerert projektiv $R$-modul er fri (det er faktisk sant for alle projektive $R$-moduler). Hint: strukturteoremet for endeliggenererte $R$-moduler. Konsekvens: enhver endeliggenerert projektiv modul over $\mathbb{Z}$ eller en polynomring $k[x]$ (hvor $k$ er en kropp) er fri.

$\boxed{10}$

**a)** Vis at i en additiv kategori så er en kjerne en pullback, mens en kokjerne er en pushout.

**b)** La

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathscr{B} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

være abelske kategorier og additive funktorer slik at $(F, G)$ danner et adjungert par (det kan faktisk vises at både $F$ og $G$ må være additive når de danner et adjungert par). Vis at $F$ er høyre eksakt (tilsvarende er $G$ venstre eksakt).

**c)** La $R$ og $S$ være to ringer, og ${}_SM_R$ en $S$-$R$-bimodul. For $N \in \mathbf{Mod}\, R$ blir da $M \otimes_R N$ en venstre $S$-modul på en naturlig måte, mens for $L \in \mathbf{Mod}\, S$ blir $\operatorname{Hom}_S(M, L)$ en venstre $R$-modul på en (litt mindre) naturlig måte (det er bare én måte å gjøre det på). Så vi har altså additive funktorer

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Mod}\, R \arrow[rr, bend left, "M \otimes_R -"] && \mathbf{Mod}\, S \arrow[ll, bend left, "\operatorname{Hom}_S(M, -)"] \end{tikzcd}$$

Vis at $M \otimes_R -$ er høyre eksakt, mens $\operatorname{Hom}_S(M, -)$ er venstre eksakt.

**d)** La $R$ og $S$ være ringer, ${}_SP_R$ en $S$-$R$-bimodul, og $Q \in \mathbf{Mod}\, R$. Vis at dersom $Q$ er projektiv, og $P$ er projektiv som en venstre $S$-modul, så er den venstre $S$-modulen $P \otimes_R Q$ også projektiv. Spesielt, hvis $P$ og $Q$ er projektive moduler over en kommutativ ring $R$, så er $P \otimes_R Q$ også projektiv.

$\boxed{11}$ **a)** La $R$ være en ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ et høyre ideal og $M \in \mathbf{Mod}\, R$. Vis at $R/\mathfrak{a} \otimes_R M$ er isomorf med $M/\mathfrak{a}M$ som abelsk gruppe. Dette kan enten vises ved å konstruere en spesifikk isomorfi, men det er også en god ide å kombinere en del av teknikkene/resultatene vi har vært gjennom, som følger. Vis først at vi har et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{a} \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & R \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & R/\mathfrak{a} \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\psi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{a}M \arrow[r] & M \arrow[r] & M/\mathfrak{a}M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

med eksakte rader, med $\lambda$ surjektiv og $\mu$ en isomorfi. Vis så at vi får en $\psi$ som passer inn, og bruk så Slangelemmaet.

**b)** Vis at $\mathbb{Z}/(m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n)$ er isomorf med $\mathbb{Z}/(d)$, hvor $d = \gcd(m, n)$. Altså er tensorproduktet null hvis og bare hvis...?

$\boxed{12}$ Her er en liten ekspedisjon et lite stykke bort fra kurset vårt, for de spesielt interesserte. I hierarkiet mellom de additive og de abelske kategoriene finner vi de såkalte *eksakte* kategoriene, definert av Quillen da han arbeidet med det som kalles $K$-teori. I disse kategoriene har vi også kort-eksakte følger (slik vi har i abelske kategorier), derav navnet. Man kan definere disse kategoriene som *ekstensjonslukkede* underkategorier av abelske kategorier, men også direkte ved hjelp av en liste med aksiomer.

Se litt på «aksiomdefinisjonen» av eksakte kategorier. For en ring $R$, finn noen eksakte kategorier ved å se på $\mathbf{Mod}\, R$.