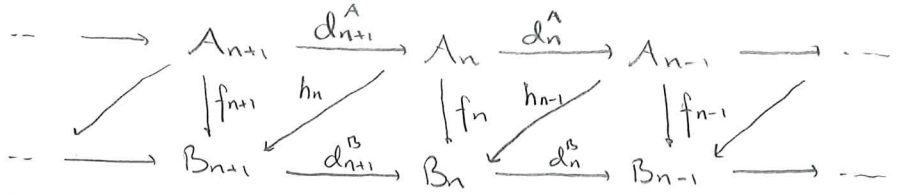
Homotopi og projektive/injektive oppløsninger

$\mathcal{A}$ additiv kat (Hom-mengder er ab gr, nullobj, biprodukt/direkte sum).

Def: En kjedeavb $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ er nullhomotop dersom $\exists\ h_n : A_n \to B_{n+1}\ \forall n$



med $f_n = d^B_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d^A_n$ $\forall n$. To kjedeavb $A_\bullet \underset{g_\bullet}{\overset{f_\bullet}{\rightrightarrows}} B_\bullet$ er homotope dersom $f_\bullet - g_\bullet$ er nullhomotop. Vi skriver da $f_\bullet \sim g_\bullet$.

Merk: (1) Vis at $\sim$ er en ekv.rel. på $\mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(A_\bullet, B_\bullet)$

(2) Vis at dersom $A_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} C_\bullet \xrightarrow{h_\bullet} D_\bullet$ er kjedeavb med $g_\bullet \sim 0$, så er $h_\bullet g_\bullet f_\bullet \sim 0$. Konsekvens: komposisjon respekterer homotopi. Dvs hvis $A_\bullet \underset{f'_\bullet}{\overset{f_\bullet}{\rightrightarrows}} B_\bullet \underset{g'_\bullet}{\overset{g_\bullet}{\rightrightarrows}} C_\bullet$ er kjedeavb med $f_\bullet \sim f'_\bullet$ og $g_\bullet \sim g'_\bullet$, så er $(g_\bullet f_\bullet) \sim (g'_\bullet f'_\bullet)$.

(3) Vis at dersom $A_\bullet \underset{g_\bullet}{\overset{f_\bullet}{\rightrightarrows}} B_\bullet$ er kjedeavb med $f_\bullet \sim 0$ og $g_\bullet \sim 0$, så er $(f_\bullet + g_\bullet) \sim 0$. Konsekvens: addisjon respekterer homotopi. Dvs hvis $A_\bullet \underset{g'_\bullet}{\overset{f_\bullet}{\underset{f'_\bullet}{\rightrightarrows}}} B_\bullet$ er kjedeavb med $f_\bullet \sim f'_\bullet$ og $g_\bullet \sim g'_\bullet$, så er $(f_\bullet + g_\bullet) \sim (f'_\bullet + g'_\bullet)$.

Def: For en add kat $\mathcal{A}$ er homotopikategorien $K(\mathcal{A})$ gitt ved

$$\mathrm{Ob}\, K(\mathcal{A}) = \mathrm{Ob}\, C(\mathcal{A}) \quad (= \text{kjedekomplekser over } \mathcal{A})$$

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A_\bullet, B_\bullet) = \mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(A_\bullet, B_\bullet)/\sim$$

Merk: (1) Merknadene viser at $K(\mathcal{A})$ blir en ny additiv kat: nullobj og direkte sum er som før.

(2) Skal se på slutten: $K(\mathcal{A})$ er en såkalt triangulert kategori.

Lemma 23 Hvis $\mathcal{A}$ er abelsk og $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ nullhomotop, så er $H_n(f_\bullet) = 0$ $\forall n$. Spesielt er da $H_n : K(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ en funktor $\forall n$.

Bevis: Oppgave, for $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}\, R$. □

Def: La $\mathcal{A}$ vær en ab kat.

(1) $\mathcal{A}$ har nok projektive hvis $\forall A \in \mathcal{A}$ finnes et proj objekt $P \in \mathcal{A}$ og en epi $P \twoheadrightarrow A$. Tilsv har $\mathcal{A}$ nok injektive hvis $\forall A \in \mathcal{A}$ finnes et inj objekt $I \in \mathcal{A}$ og en mono $A \rightarrowtail I$.

(2) Anta $\mathcal{A}$ har nok proj. En projektiv oppløsning av $A \in \mathcal{A}$ er et kompleks

$$P_\bullet: \quad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

hvor P_i er proj, $H_n(P_\bullet) = 0 \ \forall n \neq 0$, og $H_0(P_\bullet) = A$ (dvs $A = \operatorname{Coker} d_1$).

Tilsv, hvis $\mathcal{A}$ har nok inj: en injektiv oppløsning av $A \in \mathcal{A}$ er et kompleks

$$I_\bullet: \quad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow I_0 \xrightarrow{d_0} I_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} I_{-2} \longrightarrow \cdots$$

med I_j inj, $H_n(I_\bullet) = 0 \ \forall n \neq 0$, og $H_0(I_\bullet) = A$ (dvs $\operatorname{Ker} d_0 = A$).
(Trenger strengt tatt ikke anta nok proj/inj for definisjonen av proj/inj oppl.)

Lemma 24 Anta $\mathcal{A}$ har nok proj.

(1) $\forall A \in \mathcal{A}$ finnes en proj oppl av A.

(2) La $f: A \to B$ være en morfi og $P_\bullet$, $Q_\bullet$ proj oppl av hhv A og B. Da kan f løftes til en kjedeavb $f_\bullet: P_\bullet \to Q_\bullet$, i dvs $\exists f_n: P_n \to Q_n$ slik at følgende kommuterer:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2^P} & P_1 & \xrightarrow{d_1^P} & P_0 & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f_2 & \subset & \downarrow f_1 & \subset & \downarrow f_0 & \subset & \downarrow f \\
\cdots & \longrightarrow & Q_2 & \xrightarrow{d_2^Q} & Q_1 & \xrightarrow{d_1^Q} & Q_0 & \longrightarrow & B \longrightarrow 0
\end{array}$$

(3) Løftingen $f_\bullet$ i (2) er unik opp til homotopi: hvis $f'_\bullet: P_\bullet \to Q_\bullet$ også løfter f, så er $f_\bullet \sim f'_\bullet$.

Lemma 25 Som Lemma 24, men med injektive.

Bevis: (1) Siden A har nok proj finnes eksakt $K_1 \xrightarrow{i_0} P_0 \xrightarrow{\pi_0} A$ med P_0 proj, så finnes eksakt $K_2 \xrightarrow{i_1} P_1 \xrightarrow{\pi_1} K_1$ med P_1 proj, osv. Får da

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \longrightarrow 0 \longrightarrow & 0 \cdots \\
 & & & \searrow^{\pi_2} \quad \nearrow_{i_1} & & \searrow^{\pi_1} \quad \nearrow_{i_0} & & & \\
 & & & K_2 & & K_1 & & &
\end{array}$$

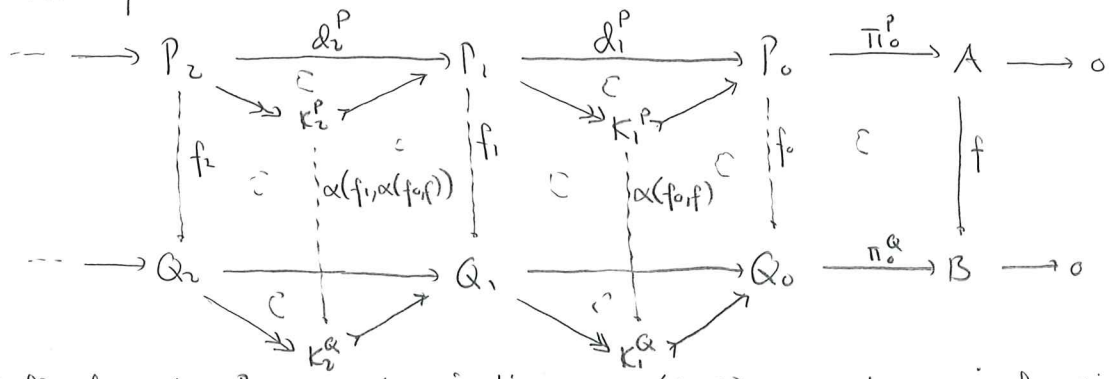
hvor $d_n = i_{n-1} \circ \pi_n$. Fra Øving 2: $\operatorname{Ker} d_n = \operatorname{Ker} \pi_n$ og $\operatorname{Im} d_n = \operatorname{Im} i_{n-1}$, så $\operatorname{Im} d_n = \operatorname{Im} i_{n-1} = \operatorname{Ker} \pi_{n-1} = \operatorname{Ker} d_{n-1}$ for $n \geq 2$. Videre fra Øving 2 er $\operatorname{Coker} d_1 = \operatorname{Coker} i_0 = A$.

(1) Merk at vi kan bryte opp enhver eksakt følge $X_\bullet$ i kort-eksakte følger siden $\operatorname{Im} d_n = \operatorname{Ker} d_{n-1} \ \forall n$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & X_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & X_n & \xrightarrow{d_n} & X_{n-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & & \searrow \quad \nearrow & & \searrow \quad \nearrow & \\
 & & & \operatorname{Im} d_{n+1} & & \operatorname{Im} d_n &
\end{array}$$

Dvs $\operatorname{Im} d_{n+1} \rightarrowtail X_n \twoheadrightarrow \operatorname{Im} d_n$ er eksakt $\forall n$, og d_n faktoriserer gjennom $\operatorname{Im} d_n$ (som vanlig).

Se nå på

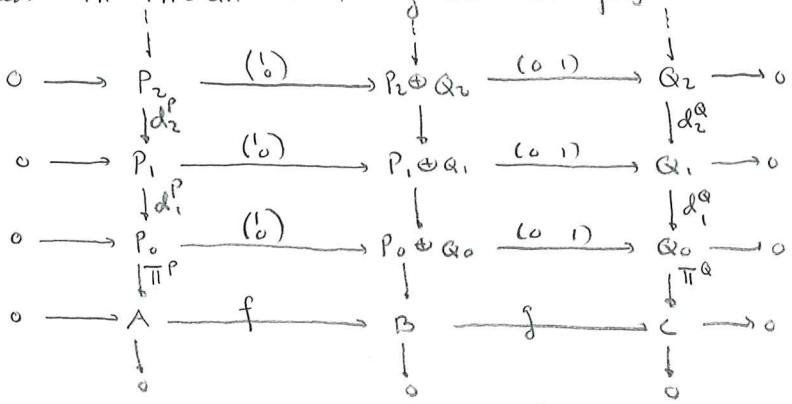


Vi får f_0 siden P_0 er proj, så får vi $\alpha(f_0, f)$ som før, så f_1 siden P_1 er proj, så $\alpha(f_1, \alpha(f_0, f))$ som før, osv.

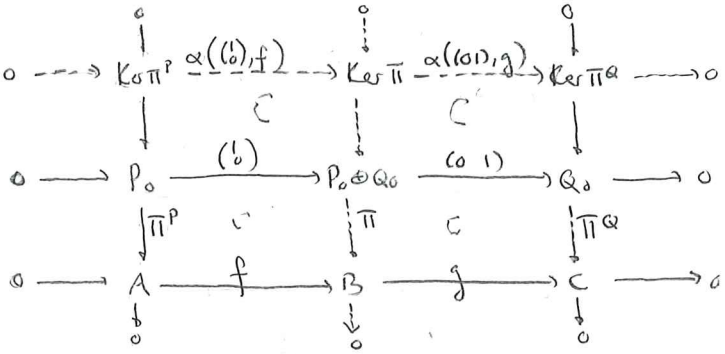
(3) Øvingsoppgave □

Lemma 26 (Hesteskolemmaet)

La $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ være en eksakt følge i $\mathcal{A}$ (abkat), og anta at $P_\bullet$ og $Q_\bullet$ er proj oppl av hhv A og C. Da finnes det en proj oppl $T_\bullet$ av B med $T_n = P_n \oplus Q_n$ $\forall n$, og slik at følgende kommuterer:



Bevis: Se på



Siden Q_0 er proj finnes $h: Q_0 \longrightarrow B$ med $g \circ h = \pi^Q$. Definer $\pi: P_0 \oplus Q_0 \longrightarrow B$ ved $\pi = (f \circ \pi^P \; h)$. Da kommuterer de to nederste firkantene (husk $g \circ f = 0$), og fra Slangelemmaet er π epi. Slangelemmaet gir også at øverste rad er eksakt, og vi vet fra tidligere at $\alpha((\binom{1}{0}, f)$ og $\alpha((0\,1), g)$ gir kommutative firkanter. Nå fortsetter vi med følgen $0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\pi^P \longrightarrow \operatorname{Ker}\pi \longrightarrow \operatorname{Ker}\pi^Q \longrightarrow 0$ osv. □