NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA3202 Galoisteori**

Faglig kontakt under eksamen: Petter Andreas Bergh
Tlf: 92032532

Eksamensdato: 10. juni 2016
Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Ingen hjelpemidler tillatt.

Målform/språk: bokmål
Antall sider: 2
Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 La $f(x) = x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

a) Finn rotkroppen E til $f(x)$ over $\mathbb{Q}$, og graden $[E : \mathbb{Q}]$ til utvidelsen.

b) Vis at Galoisgruppen $G(E/\mathbb{Q})$ ikke er abelsk.

Oppgave 2 La p være et primtall, og betrakt integritetsområdet

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-p}] = \{a + b\sqrt{-p} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

a) *Normen* av et element $u = a + b\sqrt{-p}$ i $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$ er heltallet

$$N(u) = u \cdot \overline{u} = a^2 + pb^2,$$

hvor $\overline{u}$ er den komplekskonjugerte av u. Den er multiplikativ, dvs. $N(u \cdot v) = N(u) \cdot N(v)$ for alle $u, v \in \mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$.

Bruk normen til å vise at de eneste enhetene i $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$ er 1 og -1. Vis videre at de to elementene $1 + \sqrt{-p}$ og $1 - \sqrt{-p}$ er irredusible, og at de ikke deler elementet 2.

b) Vis at dersom p er et odde primtall, så er $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$ ikke et entydig faktoriseringsområde (UFD).

Oppgave 3 La $E = F(\alpha)$ være en endelig utvidelse av en kropp F. Vis at antall ulike F-automorfier $\sigma \colon E \to E$ er maksimalt $[E : F]$.

Oppgave 4 La p og q være ulike primtall, og $E = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$.

a) Vis at E er en Galoisutvidelse av $\mathbb{Q}$, og at $[E : \mathbb{Q}] = 4$. Vis videre at Galoisgruppen $G(E/\mathbb{Q})$ er isomorf med $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

b) Finn alle ekte mellomkropper $\mathbb{Q} \subset K \subset E$.

Oppgave 5 La $F \subseteq E$ være en kroppsutvidelse, og anta at hverken 2 eller 3 deler graden $[E : F]$. Vis at

$$F(\alpha) = F(\alpha^2) = F(\alpha^3) = F(\alpha^4)$$

for alle $\alpha \in E$.

Oppgave 6

a) La F være en kropp. Vis at enhver endelig undergruppe av den multiplikative gruppen $F^* = F \setminus \{0\}$ er syklisk. Du kan bruke følgende resultat fra gruppeteorien uten bevis: hvis G er en endelig abelsk gruppe, så finnes det et element $h \in G$ slik at ordenen til g deler ordenen til h for alle $g \in G$.

b) La p være et primtall og $w = e^{2\pi i/p} \in \mathbb{C}$. Vis at Galoisgruppen $G(\mathbb{Q}(w)/\mathbb{Q})$ er syklisk av orden $p - 1$.