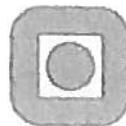


Faglig kontakt under eksamen: Professor Christian Skau  
(telefon: 91755)



### Eksamensinformasjon

Eksamensdato: Torsdag 1. juni 2006

Tid: 09.00 - 13:00  
Hjelpeemidler: Ingen  
Bokmål

Sensur: 22. juni 2006

#### Oppgave 1

La  $f(x) \in F[x]$  være et irreduksibelt polynom over kroppen  $F$ , der  $F$  har karakteristikk 0. La  $E$  være rotkroppen til  $f(x)$  over  $F$ , og anta at Galoisgruppen  $G = G(E|F)$  er abelsk.

Vis at hver rot  $\alpha$  til  $f(x)$  er et primitivt element, dvs.  $E = F(\alpha)$ .

#### Oppgave 2

Vis at den diofantiske ligningen

$$y^2 + 2 = z^4$$

ikke har noen løsninger i  $\mathbb{Z}$ .

[Hint:  $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$  er et entydig faktoriseringssområde.]

### Oppgave 3

La  $F$  være en kropp av karakteristikk  $p$ , der  $p$  er et primtall. La  $f(x) \in F[x]$  være et irreduksibelt polynom med multiple røtter. Vis at det finnes  $s \in \{1, 2, 3, \dots\}$  og et irreduksibelt og *separabelt* polynom  $g(x) \in F[x]$ , slik at  $f(x) = g(x^{p^s})$ .

### Oppgave 4

- a) La  $K$  være en Galoisk utvidelse av  $F$ . La  $g(x) \in K[x]$  være irreduksibel over  $K$ , og la  $\sigma \in G(K|F)$ .

Vis at  $\sigma(g(x)) \in K[x]$  er irreduksibel over  $K$ .

- b) La  $f(x) \in F[x]$  være et (monisk) irreduksibelt polynom over  $F$  av primtallsgrad  $p$ .

Vis at dersom  $f(x)$  er redusibel i  $K[x]$ , så vil alle røttene til  $f(x)$  ligge i  $K$ .

[ $F$  og  $K$  er som i a).]

### Oppgave 5

La  $f(x) = x^3 - 21x + 6 \in \mathbb{Q}[x]$ , og la  $E$  være rotkroppen til  $f(x)$  over  $\mathbb{Q}$ . Man kan vise at  $E \subset \mathbb{R}$ . Vis at  $E$  ikke er et radikaltårn over  $\mathbb{Q}$ .