| |

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Professor Christian Skau
(telefon: 91755)

Eksamen i MA3202 Galoisteori

Torsdag 1. juni 2006
Tid: 09.00 - 13:00
Hjelpemidler: Ingen
Bokmål

Sensur: 22. juni 2006

Oppgave 1

La $f(x) \in F[x]$ være et irredusibelt polynom over kroppen F, der F har karakteristikk 0. La E være rotkroppen til $f(x)$ over F, og anta at Galoisgruppen $G = G(E|F)$ er abelsk.

Vis at hver rot α til $f(x)$ er et primitivt element, dvs. $E = F(\alpha)$.

Oppgave 2

Vis at den diofantiske ligningen

$$y^2 + 2 = z^4$$

ikke har noen løsninger i $\mathbb{Z}$.

[Hint: $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ er et entydig faktoriseringsområde.]

Oppgave 3

La F være en kropp av karakteristikk p, der p er et primtall. La $f(x) \in F[x]$ være et irredusibelt polynom med multiple røtter. Vis at det finnes $s \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ og et irredusibelt og *separabelt* polynom $g(x) \in F[x]$, slik at $f(x) = g(x^{p^s})$.

Oppgave 4

a) La K være en Galoisk utvidelse av F. La $g(x) \in K[x]$ være irredusibel over K, og la $\sigma \in G(K|F)$.

Vis at $\sigma(g(x)) \in K[x]$ er irredusibel over K.

b) La $f(x) \in F[x]$ være et (monisk) irredusibelt polynom over F av primtallsgrad p.

Vis at dersom $f(x)$ er redusibel i $K[x]$, så vil alle røttene til $f(x)$ ligge i K.

[F og K er som i a).]

Oppgave 5

La $f(x) = x^3 - 21x + 6 \in \mathbb{Q}[x]$, og la E være rotkroppen til $f(x)$ over $\mathbb{Q}$. Man kan vise at $E \subset \mathbb{R}$. Vis at E ikke er et radikaltårn over $\mathbb{Q}$.