Galois-teori

vår 2022

Aslak Bakke Buan

Galoisteori vår 22

- Aslak Bakke Buan

- rom 846, Sentralbygg II

wiki: math.ntnu.no/ma3202/2022v

Litt historie

Løsning av polynom-ligninger (= n'te grads ligninger)

sentralt i matematikkens historie

2. grads: "kjent" siden Babylon - 4000 siden, men negative, irrasjonale, komplekse løsninger, senere..

abc-formelen med moderne notasjon: Descartes (1637).

3./4. grads: "renessanse-matematikk", Italia, 1500-tallet

Cardano, Bombelli, Ferrari

/ | /

Ars Magna 1545 Komplekse tall 4. grads

Cardanos formel på $x^3 - 15x - 4 = 0$

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

$$\sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$$

$$2+i + 2-i = 4$$

orig: sjekk!

$$(2+i)^3 = 2+11i$$

$$(2-i)^3 = 2-11i$$

Algebraisk løsning (løsning v.h.a. radikaler): formlene inneholdt $+, -, \cdot, /$ og $\sqrt[n]{\ldots}$

Femtegrads?

Eks: a) $x^5 - 1 = 0$

$\parallel$

$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ / løsbar ved Cardanos formel.

b) $x^5 - x - 1 = 0$?

Abel [Ruffini]: (1824) for noen 5.grads ligninger, finnes det ingen algebraisk løsning!

Galois: (1830) Gir en "oversettelse" av problemet (altså om en ligning er løsbar eller ikke), til et problem om grupper (Galois-grupper).

Idé: $f(x)$ polynom med koeff. i $\mathbb{Q}$.

La $\mathbb{Q}_f$ være "den minste kroppen" som inneholder både $\mathbb{Q}$ og alle røttene til $f(x)$ – "rotkroppen".

La $G(\mathbb{Q}_f/\mathbb{Q})$ være gruppa av automorfier $\alpha: \mathbb{Q}_f \to \mathbb{Q}_f$ s.a. $\alpha|_{\mathbb{Q}} = id$.

Da er $f(x)=0$ alg. løsbar $\Leftrightarrow$ $G(\mathbb{Q}_f/\mathbb{Q})$ er en løsbar gruppe

Ex: $f(x) = x^5 - x - 1$.

$G(\mathbb{Q}_f/\mathbb{Q}) \cong S_5$ – ikke løsbar gruppe

(løsbar gruppe = solvable group)

Oversikt

Galois-teori

TMA4150

(Polynomer ⟷ Kropper) (Symmetrier ⟷ Grupper)

Leke-eksempel:

$f(x) = x^2 - 2$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

↓

rotkroppen for f.

$\mathbb{Q}_f$

$a + b\sqrt{2}$ ↓ $a - b\sqrt{2}$

$\mathbb{Z}_2$ - Galois-gruppen.

automorfi α med $\alpha|_{\mathbb{Q}} = id$.

Ma 3202 - Innhold

Kap 11 - UFDer og Euklidske områder

Hovedeksempel : $F[x]$ $\mathbb{Z}$ F-Kropp.

(overlapper med MA 3201)

Kap 15 - Algebraiske Kroppsutvidelser

Eksempel $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$

Kap 16 - Rotkropper

+

Endelige Kropper (= Kroppsutvidelser av $\mathbb{Z}_p$)

Kap 17 : Galois-teoriens fundamentalteorem

Kap 18 : "Anvendelser" : inkludert 5, gradsligningen...

Praktisk

Föreläsningar Torsdag / fredag

14^{15}–16^{00}

Zoom / fysisk (?)

Examen

?

Övningar

6 (±1) ingår i föreläsningarna, se plan på wiki-sida.

Ref.gr.