Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Sverre O. Smalø, telefon 91750

Eksamen i MA3202 Galoisteori

Bokmål
Mandag 18. mai 2009
Tid: 09.00 - 13:00
Hjelpemidler: Ingen

Sensur: Fredag 5. juni 2009

Oppgave 1

Vis at $\sqrt{-5}|(a + b\sqrt{-5})$ i $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ hvis og bare hvis $5|a$, og bruk det til å vise at $\sqrt{-5}$ er et primisk element i $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$.

Oppgave 2

La F være en endelig kropp og la $\mathrm{char}(F) = 7$. Vis at hvert element $a \in F$ har en entydig 7ende rot $\sqrt[7]{a}$, dvs. $b^7 = a$, der $b = \sqrt[7]{a}$.

Oppgave 3

a) La $f(x) = x^3 + 27x + 6 \in \mathbf{Q}[x]$ og la E være rotkroppen til $f(x)$ over $\mathbf{Q}$. Bestem $G(E|\mathbf{Q})$. (Hint: Undersøk de reelle røttene til $f(x)$.

b) Vis at det finnes en og kun en kropp K slik at $\mathbf{Q} \underset{\neq}{\subset} K \underset{\neq}{\subset} E$ og K er en normal utvidelse av $\mathbf{Q}$.

Oppgave 4

a) La $\begin{array}{c} K \\ | \\ F \end{array}$ være en Galoisk utvidelse, og la L være en mellomkropp $\begin{array}{c} K \\ | \\ L \\ | \\ F \end{array}$. Vis at $\begin{array}{c} K \\ | \\ L \end{array}$ er en Galoisk utvidelse.

b) Gi et eksempel som viser at $\begin{array}{c} L \\ | \\ F \end{array}$ ikke behøver å være en Galoisk utvidelse.

Oppgave 5

La $\begin{array}{c} K \\ | \\ F \end{array}$ være en Galoisk utvidelse slik at $G(K|F)$ er syklisk av orden n, og la σ være en generator for $G(K|F)$. Anta at F inneholder en primitiv n'te enhetsrot ω. La $\alpha \in K \backslash F$, og la $(\omega, \alpha) \neq 0$ være Lagrange-resolventen definert ved

$$(\omega, \alpha) = \alpha + \omega\sigma(\alpha) + \cdots + \omega^{n-1}\sigma^{n-1}(\alpha)$$

a) Vis at $a = \alpha + \sigma(\alpha) + \cdots + \sigma^{n-1}(\alpha)$ er et element i F.

b) Vis at $K = F((\omega, \alpha))$.

c) La $b = (\omega, \alpha)^n$. Vis at $b \in F$ og at K er rotkroppen til $x^n - b \in F[x]$ over F.

d) Begrunn hvorfor $x^n - b$ er et irredusibelt polynom over F.