Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Solberg
Telefon: 73 59 17 48

EKSAMEN I RINGER OG MODULER (MA3201)

Norsk
Fredag 9. juni 2011
Tid: 09:00–13:00
Hjelpemidler: Ingen

Sensurdato: 20.06.2011.

Oppgave 1 La A være 3×3-matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

over $\mathbb{C}$, de komplekse tall.

a) Finn Smith normal form av matrisen $A - xI_3$ over ringen $\mathbb{C}[x]$, hvor $\mathbb{C}[x]$ er polynomringen i en variabel x over $\mathbb{C}$ og I_3 er 3×3-identitetsmatrisen.

b) Finn den rasjonale kanoniske formen til matrisen A over $\mathbb{C}$.

c) Finn den Jordan-kanoniske formen til matrisen A over $\mathbb{C}$.

Oppgave 2 La $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ i den fulle matriseringen $M_3(\mathbb{Z}_2)$, der $\mathbb{Z}_2$ er kroppen med to elementer.

Definer $\psi\colon \mathbb{Z}_2[x] \to M_3(\mathbb{Z}_2)$ ved at for $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$ i $\mathbb{Z}_2[x]$, vi har

$$\psi(f(x)) = a_0I_3 + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_mA^m,$$

der I_3 er identitetsmatrisen i $M_3(\mathbb{Z}_2)$.

a) Vis at ψ er en homomorfi av ringer.

b) Finn $\operatorname{Ker}\psi$, og vis at bildet til ψ, som vi betegner $\operatorname{Im}\psi$, er en underring av $M_3(\mathbb{Z}_2)$ og en kropp med 8 elementer.

c) La $F = \operatorname{Im}\psi$. Hvorfor er ikke $M_3(\mathbb{Z}_2)$ en algebra over F, når virkningen av underringen F på $M_3(\mathbb{Z}_2)$ er den naturlige? Finn en kropp k slik at $M_3(\mathbb{Z}_2)$ er en algebra over k, og bestem dimensjonen til $M_3(\mathbb{Z}_2)$ som vektorrom over k.

Oppgave 3 La V være et vektorrom over en kropp F der $\dim_F V = n < \infty$. La $T\colon V \to V$ være en ikke-null lineær transformasjon. Da blir V en $F[x]$-modul ved å definere

$$x^i \cdot v = T^i(v)$$

for alle v i V og $i \geq 0$. Det er ikke nødvendig å vise dette.

a) La $\operatorname{Ann}_{F[x]} V = \{g(x) \in F[x] \mid g(x) \cdot v = 0 \text{ for alle } v \in V\}$. Vis at $\operatorname{Ann}_{F[x]} V$ er et ideal i $F[x]$.

La $f(x)$ være minimalpolynomet til T. Vis at $\operatorname{Ann}_{F[x]} V = (f(x))$.

b) Anta at T er en ikke-null nilpotent lineær transformasjon, dvs. $T^l = 0$ for et positivt helt tall l. Vis at minimalpolynomet $f(x)$ til T er lik x^m for et helt tall m med $0 < m \leq n$.

c) Anta også i dette punktet at $T\colon V \to V$ en ikke-null nilpotent linear transformasjon. Hva er den minste mulige dimensjonen av kjernen til T? Og hva er den størst mulige dimensjonen til kjernen til T?