NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA3201 Ringer og moduler**

Faglig kontakt under eksamen: Sverre O. Smalø
Tlf: 7359 1750

Eksamensdato: 8. deseber 2016
Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: B: Enkel kalkulator.

Målform/språk: bokmål
Antall sider: 2
Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☐
sort/hvit ☐	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 La p og q være primtall med $p \neq q$, og la

$$\mathbb{Z}_{(p,q)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid gcd(a,b) = 1, p \not| b, q \not| b\}$$

a) Vis at $\mathbb{Z}_{(p,q)}$ er en underring av $\mathbb{Q}$.

b) Vis at $\mathbb{Z}_{(p,q)}$ er et hovedidealområde. (PID)

Definer $\phi_p : \mathbb{Z}_{(p,q)} \to \mathbb{Z}_p$ ved at $\phi_p(\frac{a}{b}) = ab' \mod p$, der b' er bestemt ved at $bb' + pp' = 1$ for heltall b' og p'.

c) Vis at ϕ_p er en surjektiv ringhomomorfi.

d) Finn de maksimale idealene i $\mathbb{Z}_{(p,q)}$.

e) Er $\mathbb{Z}_{(p,q)}$ artinsk og/eller noethersk?

Oppgave 2

a) Finn Smith normal form til matrisen

$$\begin{pmatrix} X & -1 & -2 & -3 \\ -3 & X & -1 & -2 \\ -1 & -3 & X & -1 \\ -1 & -2 & -3 & X \end{pmatrix}$$

over $\mathbb{Q}[X]$.

b) Finn rasjonal kanonisk form til matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 3 La $\Lambda = \{\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Q}\} \subset M_4(\mathbb{Q})$.

a) Vis at Λ er en underring av $M_4(\mathbb{Q})$, ringen av 4×4 matriser over $\mathbb{Q}$.

b) Er Λ semisimpel? Svaret må begrunnes.

Oppgave 4

La Λ være en ring og M en Λ-modul slik at M har en simpel undermodul M_1 med M/M_1 også simpel. La N være en undermodul av M.

a) Vis at da må $N = 0$, eller $N = M$, eller $N = M_1$, eller $N \simeq M/M_1$.

b) Vis at dersom $N \neq M_1$ og N er simpel, så er $N \simeq M/M_1$ og $M \simeq N \times M_1$.

c) Gi et konkret eksempel på en ring Λ og på en modul M med undermoduler M_1 og N som ovenfor, der $N = M_1$ og $N \simeq M/M_1$, men M ikke isomorf med $N \times M_1$.