Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt:
Aslak Bakke Buan 73 55 02 89/40 84 04 68

Eksamen i MA3201: Ringer og moduler

Bokmål
7. august, 2013
Tid: 0900-1300

Tillatte hjelpemidler:
enkel kalkulator

Alle svar må begrunnes og forklares.

Oppgave 1

Finn Smith normalform over heltallene $\mathbb{Z}$ for matrisen $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 12 & -6 & 6 \\ -16 & 10 & -4 \end{bmatrix}$.

Oppgave 2 La A være en 4×4-matrise over $\mathbb{R}$ med minimalpolynom $m_A(x) = (x-3)^2$. Hva er de mulige rasjonalkanoninske formene A kan ha?

Oppgave 3 La G være en gruppe av orden 2 og la $\mathbb{Z}_2$ være kroppen med 2 elementer. Er gruppperingen $\mathbb{Z}_2G$ semisimpel?

Oppgave 4 La $F = \mathbb{Z}_2$, og betrakt mengden av alle matriser

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & 0 & e \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

a) Vis at R er en underring av ringen $M_3(\mathbb{Z}_2)$ av alle 3×3-matriser over $\mathbb{Z}_2$. Er R en kommutativ ring? Er R en semisimpel ring? Er R en venstreartinsk ring?

b) Finn to ekte, ikke-trivielle, tosidige idealer I og J, slik at R/I er semisimpel og R/J ikke er semisimpel.

c) Det finnes 6 forskjellige venstreidealer $J_1, \dots, J_6$ i R, med $\dim_{\mathbb{Z}_2} J_i = 1$. Finn disse venstreidealene, og vis at de gir opphav til to simple ikke-isomorfe venstre R-moduler.

Oppgave 5 La R være en ring, og la $\phi\colon S \to R$ være en ringhomomorfi.

a) Hva betyr det at en venstre R-modul er *endeliggenerert*?

b) (i) Forklar på hvilken måte hver venstre R-modul også er en venstre S-modul.

(ii) Anta ϕ er surjektiv (på). Vis at en endeliggenerert venstre R-modul også er en endeliggenerert venstre S-modul.

c) (i) Skriv ned Zorns lemma.

(ii) Bevis at hver endeliggenererte venstre R-modul har en maksimal undermodul.