MA3002 Generell topologi våren 2011

Semesterprosjekt

$\boxed{1}$ Gitt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ rasjonal,} \\ 1 & x \text{ irrasjonal.} \end{cases}$$

Vis at f ikke er kontinuerlig i noe punkt.

Finn en funksjon $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at $f + g$ er kontinuerlig overalt.

$\boxed{2}$ $g, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kontinuerlige. Vis at $V = \{x \mid f(x) = g(x)\}$ er lukket.

$\boxed{3}$ $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er gitt ved:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Vis at g er kontinuerlig i 0, men ikke f.

$\boxed{4}$ $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ irrasjonal,} \\ \frac{1}{b} & x \text{ rasjonal} = \frac{a}{b} \text{ (forkortet).} \end{cases}$$

Vis at f er kontinuerlig i alle irrasjonale punkt, og diskontinuerlig i alle rasjonale.

$\boxed{5}$ La $\mathbb{N}$ være de positive hele tall. La $\mathcal{T} = \{\emptyset, E_n\}$, $E_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$, $n \in \mathbb{N}$.

i) Vis at $\mathcal{T}$ er en topologi.

ii) Bestem de åpne mengdene som inneholder 6.

iii) Bestem de undermengder E som er slik at $E' = \mathbb{N}$. Bestem $\{4, 13, 28, 37\}'$.

iv) Bestem tillukningen av $\{7, 24, 47, 85\}$ og $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$.

v) Hvilke undermengder $A \subset \mathbb{N}$ er slik at $\bar{A} = \mathbb{N}$ (A kalles da «tett» i $\mathbb{N}$)?

$\boxed{6}$ Gitt $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ hvor $\mathcal{T}$ er gitt ved $\mathcal{T} = \{\mathbb{R}, \emptyset, E_a = (a, \infty), a \in \mathbb{R}\}$.

i) Hva er de lukkede mengdene?

ii) Bestem tillukningen av $[3, 7)$, $\{7, 24, 47, 85\}$, $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$.

$\boxed{7}$ **i)** Gi et eksempel på en kontinuerlig avbildning, som er åpen, men ikke lukket.

ii) Vis at f lukket $\iff$ $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$ for alle $A \subset X$.

$\boxed{8}$ $A \subset X$, X metrisk, $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$.
Vis at: $\bar{A} = \{x \mid d(x, A) = 0\}$.

$\boxed{9}$ Gitt to undermengder $A, B \subset \mathbb{R}$ ved:

$$A = \left\{ (x, y) \,\middle|\, 0 \leq x \leq 1, y = \frac{x}{n}, n \in \mathbb{N} \right\},$$
$$B = \left\{ (x, 0) \,\middle|\, \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right\}.$$

Vis at $A \cup B$ er sammenhengende, men ikke veisammenhengende.