



Faglig kontakt under eksamen: Nils A. Baas
Telefon 73 59 35 19/20

Eksamen i MA3002 Generell topologi

Bokmål
Tirsdag 5. juni 2012
Tid: 15.00 – 19.00

Hjelpemidler (kode D): Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Enkel kalkulator (Hewlett Packard HP30S eller Citizen SR-270X).

Sensur: 26. juni 2012

Oppgave 1 La A være en delmengde av et topologisk rom X og la \bar{A} betegne tillukningen som er definert som snittet av alle lukkede delmengder som inneholder A .

- a) Vis at $x \notin \bar{A}$ hvis og bare hvis der eksisterer en åpen mengde U slik at $x \in U$ og $U \cap A = \emptyset$.
- b) Vis at om en kontinuerlig funksjon

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}$$

er 0 på en tett delmengde i X , så er den 0 på hele X .

Oppgave 2

- a) Vis at et topologisk rom er Hausdorff hvis og bare hvis

$$\bigcap_{x \in V, V \text{ åpen}} \bar{V} = \{x\}$$

for alle $x \in X$.

- b) Definer et normalt topologisk rom. Vis at ethvert metrisk rom X er normalt.

Oppgave 3

- a) La A være en sammenhengende delmengde av et topologisk rom X , og videre er $\{A_i\}_{i \in I}$ en familie av sammenhengende delmengder av X slik at $A \cap A_i \neq \emptyset$ for alle i .

Vis at unionen av A og alle mengdene A_i er sammenhengende.

- b) Vis at intervallene $(0, 1)$ og $(0, 1]$ ikke er homeomorfe.

Oppgave 4

- a) Gitt et produktrom $X \times Y$ der Y er kompakt og gitt et lukket underrom $Z \subset X \times Y$ disjunkt fra $\{x_0\} \times Y$.

Vis at det fins en omegn U om x_0 i X slik at $U \times Y$ er disjunkt fra Z .

- b) Anvend **a)** til å vise at projeksjonen $p: X \times Y \rightarrow X$, gitt ved $p(x, y) = x$, er lukket (dvs. $p(\text{lukket}) = \text{lukket}$) hvis Y er kompakt. Gi også et moteksempel med et ikke-kompakt rom Y .

- c) En kontinuerlig avbildning

$$f: X \rightarrow Y$$

kalles *proper* hvis $f^{-1}(K)$ er kompakt når K er en kompakt delmengde av Y .

Vis at hvis X er kompakt og Y Hausdorff, da er enhver kontinuerlig avbildning $f: X \rightarrow Y$ proper.

- d) Vis videre at et kompakt underrom av et metrisk rom er lukket og begrenset.