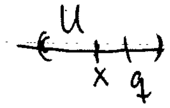
Ma 3002 Generell topologi
Eksamen våren 2007

Kortfatta løysingsforslag

Oppgave 1

$\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ tellbar basis, $O_n \neq \emptyset$. Velg $x_n \in O_n$.
Då er $\{x_n, n=1,2\dots\}$ ei tellbar tett delmengde:
Gitt $x \in X$, $x \in U$, velg O_n slik at $x \in O_n \subset U$.
Då er $x_n \in U$.
Når $X = \mathbb{R}$, er $\mathbb{Q}$ tellbar og tett, så $\mathbb{R}$ er separabelt: 

$q \in \mathbb{Q}$

Oppgave 2

(a) Hvis $U \subsetneq X$ er open og tett, så $\bar{U} = X$ og $\mathrm{Int}(\bar{U}) = X$, altså forskjellig frå U.

(b) $\partial A = \bar{A} \cap (\mathrm{Int}(A)^c)$ er lukka og $\subset \bar{A}$.

(i) La $x \in \partial A$. Hvis $x \notin A$ så $x \in X - A$, og difor $x \in \bar{A} \cap \overline{(X-A)}$

Omvendt, la $x \in \bar{A} \cap \overline{(X-A)}$. Då er $x \in \bar{A}$. Hvis $\underline{x \in \mathrm{Int}(A)}$, så finst $U \subset X$ open, $x \in U \subset A$, og difor $U \cap (X-A) = \emptyset$, altså $x \notin \overline{(X-A)}$. Umulig, så vi må ha $x \notin \mathrm{Int}(A)$, og difor $x \in \bar{A} - \mathrm{Int}(A) = \partial A$.

(ii) U open $\Rightarrow \partial U \overset{\text{def}}{=} \bar{U} - \mathrm{Int}(U) = \bar{U} - U$

$\partial U = \bar{U} - U \Rightarrow U = \mathrm{Int}(U) \Rightarrow U$ open

Oppgave 3

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \cap & \nearrow_{g} & \\ \bar{A} & & \end{array}$$

(a)

Eintydig g: La $x \in \bar{A}$, $\exists$ sekvens $\{a_n\}$, $a_n \to x$, $a_n \in A$, og

$$g(x) = g(\lim a_n) = \lim g(a_n) = \lim f(a_n)$$

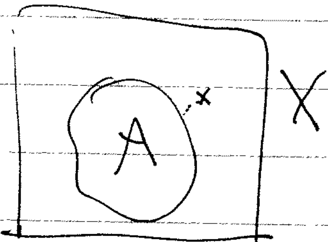
) eit Hausdorff rom ~~kan~~ må sekvensen $\{f(a_n)\}$ ha eintydig grense (som i dette tilfelle eksisterer)

(b) $\bar{A}$ er lukka, $g : \bar{A} \longrightarrow \mathbb{R}$

X er normalt.

Tietz's utvidelsesteorem gir at utvidelsen til heile X eksisterer.

Oppgave 4



(a) $d_A(x) = 0$:

Velg $a_n \in A$, $\left| d(a_n, x) \cancel{- d_A(x)} \right| < \frac{1}{n}$

Det gir $a_n \to x$, altså $x \in \bar{A}$.

Omvendt, hvis $x \in \bar{A}$, velg slik sekvens $\{a_n\}$ at $a_n \to x$, $a_n \in A$, og få $\inf\{d(a,x), a \in A\} = 0$

For $a, b \in A$, $d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,b)$,

Ta inf over alle $b \in A$ på høgre side, og få

$$d(x,a) \leq d(x,y) + d_A(y)$$

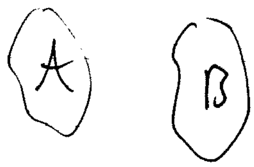
Ta så inf over alle $a \in A$, og få $d_A(x) \leq d(x,y) + d_A(y)$

P.g.a symmetri, bytt x og y og få

$$|d_A(x) - d_A(y)| \le d(x,y)$$

Dermed blir d_A (uniformt) kontinuerlig på X.

(b) Sett $f(x) = \dfrac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$



Oppgave 5

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]\times[0,1]} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & S^1 \times S^1 \\
{[0,1]^2/\equiv} \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$(s,t) \mapsto (e^{2\pi i s}, e^{2\pi i t})$$

$\bar{f}$ injektiv og surjektiv, og kont.

$[0,1]^2/\equiv$ er kompakt $\Rightarrow$ $\bar{f}$ er lukka $\Rightarrow$ $\bar{f}$ homeo

Oppgåve 6

a) La $p_0 = 0 \in B^2$ vere basis punkt. Hvis $[\gamma] \in \pi_1(B^2)$, så definer homotopi

$$F : I \times I \longrightarrow B^2, \quad F(t,s) = s \cdot \gamma(t)$$

Då er $F(t,0) = 0 \ \forall t$, og $F(t,1) = \gamma(t)$, så $F : \gamma \simeq_p 0$, der 0 er den konstante loop i p_0. Difor er $[\gamma] = e$, så $\pi_1(B^2)$ er triviell

Hvis $p : X \longrightarrow B^2$ er overdekking, så er

$$\pi_1(B^2)/p_*\pi_1(X) \xleftrightarrow{\ 1-1\ } p^{-1}(0)$$

Men $\pi_1(B^2)$ er triviell (og spesielt også $\pi_1(X)$), så $p^{-1}(0)$ er berre __eitt__ punkt. Difor er p __injektiv__, og er dessutan surjektiv, kontin. og ~~er~~ ei __open__ avbildning, som medfører at p er ein __homeomorfi__,

$$p : X \xrightarrow{\ \cong\ } B^2$$

b) Hvis vi har ein retraksjon r, så

$$\begin{tikzcd}
T^2 \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "Id"'] & S^1 \times B^2 \arrow[r, "r"] & T^2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(T^2) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, equal] & \pi_1(S^1 \times B^2) \arrow[r, "r_*"] \arrow[d, equal] & \pi_1(T^2) \arrow[d, equal] \\
\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \arrow[r, "i_*"] \arrow[rr, bend right, "\text{Id, umulig!}"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "r_*"] & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

<u>Oppgave 7</u>

$$d : \underbrace{A \times A}_{\text{kompakt}} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{kont.}$$

(a) $\Rightarrow$ d har maksimumspunkt (x_0, y_0):

$$d(x_0, y_0) = \operatorname{diam}(A)$$

(b) Anta A har minst to punkt. Då er $\operatorname{diam}(A) > 0$

Velg $x_0 \neq y_0$, $d(x_0, y_0) = \delta > 0$
$= \operatorname{diam}(A)$

$\Rightarrow$

Velg x_1, y_1, $f(x_1) = x_0$, $f(y_1) = y_0$

$$d(f(x_1), f(y_1)) < d(x_1, y_1)$$

$$\Vert$$

$d(x_0, y_0) = \delta$ umulig, fordi $x_1, y_1 \in A$

Familien $\{A_k\}$ har opplagt <u>endelig snitt</u> eigenskapen, består av lukka mengder i eit kompakt rom. Difor er snittet $A \neq \emptyset$.

$$x \in A \Rightarrow x \in A_k \ \forall k \Rightarrow f(x) \in A_{k+1} \ \forall k$$
$$\Rightarrow f(x) \in \bigcap_k A_k = A$$

Så $f(A) \subset A$.

Omvendt, hvis $x \in A$, så er
$x \in A_1, x \in A_2, \dots$

Velg x_k slik at $f^{k+1}(x_k) = x$, og sett $y_k = f^k(x_k)$
Avsnittet om følgekompakthet er ikke
pensum, derfor hintet:
Velg delfølge av $\{y_k\}$, kan derfor anta
$y_k \to a$. Det gir

$$\underbrace{f(y_k)}_{f^{k+1}(x_k) = x} \longrightarrow f(a) \qquad \Longrightarrow \quad A \subset f(A)$$