Oppgave 1 Mengden $\overline{A}\times\overline{B}$ er lukket fordi komplementet $((X-\overline{A})\times Y)\cup(X\times(Y-\overline{B}))$ er en union av to åpne mengder. Siden $A\times B\subseteq\overline{A}\times\overline{B}$ er $\overline{A\times B}\subseteq\overline{A}\times\overline{B}$.
Omvendt, dersom $(x,y)\in\overline{A}\times\overline{B}$ og W er en omegn om (x,y), så vil W inneholde en mengde av formen $U\times V$ der U er en omegn om x og V er en omegn om y. Siden $U\cap A\neq\emptyset$ og $V\cap B\neq\emptyset$ har vi også at $W\cap(A\times B)\neq\emptyset$, som viser at $\overline{A}\times\overline{B}\subseteq\overline{A\times B}$. ∎

Oppgave 2 Det at $(x,y)\in(X\times X)-\Delta$ er ekvivalent med at $x\neq y$. For to delmengder U og V har vi at $U\cap V=\emptyset$ er ekvivalent med at $(U\times V)\cap\Delta=\emptyset$. At rommet X er Haussdorff betyr at for forskjellige punkter x og y, finnes disjunkte omegner U om x og V om y, og dette er ekvivalent med at ethvert punkt utenfor diagonalen har en omegn av formen $U\times V$ som ikke møter diagonalen. Dette er igjen ekvivalent med at diagonalen er lukket fordi omegner av denne typen danner en basis for omegnene. ∎

Oppgave 3 La $K\subseteq X$ være kompakt og la $x\in X-K$. Vi ønsker å finne en omegn U om x med $U\cap K=\emptyset$. For hvert punkt $y\in K$, la U_y og V_y være disjunkte åpne omegner om henholdsvis x og y. De åpne mengdene $\{V_y\}_{y\in K}$ dekker K og siden K er kompakt kan vi velge ut et endelig antall punkter $y_1,y_2,\ldots,y_n$, slik at $K\subseteq\bigcup_{1\leq i\leq n}V_{y_i}$. Sett $U=\bigcap_{1\leq i\leq n}U_{y_i}$. Da er U en omegn om x og $U\cap K=\emptyset$. ∎

Oppgave 4 Funksjonen f^{-1} er kontinuerlig. Her kommer beviset. Vi viser først at et kontinuerlig bilde av en kompakt er kompakt. For enhver delmengde $K\subseteq X$ vil en mengde $\mathcal{U}$ være en overdekning av $f(K)$, hvis og bare hvis $f^{-1}(\mathcal{U})=\{f^{-1}(U)\,|\,U\in\mathcal{U}\}$ er en overdekning av av K, så dersom K er kompakt og $\mathcal{U}$ er en åpen overdekning av $f(K)$ vil på grunn av kontinuiteten, $f^{-1}(\mathcal{U})$ være en åpen overdekning av K, og av kompakthet følger det at det fins en endelig delmengde $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$ slik at $\{f^{-1}(U)\,|\,U\in\mathcal{V}\}$ dekker K og da dekker $\mathcal{V}$ $f(K)$, Det vil si $f(K)\subseteq\bigcup\mathcal{V}$.
Dersom K er kompakt og $F\subseteq K$ er en lukket delmengde av K, så er F kompakt fordi en overdekning av F kan utvides til en overdekning av K ved å føye til én åpen mengde $X-F$. Av dette og oppgave 3 følger det at f sender lukkede mengder til lukkede mengder, og siden f er en bijeksjon sender den også åpne mengder til åpne mengder, som viser at f^{-1} også er kontinuerlig. ∎

Oppgave 5 At X er usammenhengende i topologien $\mathcal{T}$ betyr at finnes det to disjunkte ikketomme mengder U og V i $\mathcal{T}$ slik at $U\cup V=X$. Siden $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}'$, er U og V i $\mathcal{T}'$. Altså dersom $(X,\mathcal{T}')$ er sammenhengende så er $(X,\mathcal{T})$ sammenhengende. ∎

Oppgave 6 Dersom $a\in X-A$, så er hele mengden $\{a\}\times Y\subseteq(X\times X-(A\times B))$. Det samme gjelder mengder av formen $X\times\{b\}$ for $b\in Y-B$. Siden både A og B er ekte undermengder er $X\times X-(A\times B)$ en union av "kryss" $(X\times\{b\})\cup(X\times\{b\})$. Disse kryssmengdene er sammenhengende og har parvis ikketomme snitt, følgelig er $X\times X-(A\times B)$ sammenhengende. ∎

Oppgave 7 De åpne intervallene $\mathcal{B}=\{(p,q)\,|\,p\in\mathbb{Q},q\in\mathbb{Q}\text{ og }p<q\}$ danner en basis for topologien fordi ethvert intervall (a,b) er en union av slike. Vi har $(a,b)=\bigcup_{a<p<q<b}(p,q)$. Videre er $\mathcal{B}$ tellbar fordi de rasjonale tallene er tellbare, produktet av to tellbare mengder er tellbart, og en delmengde av en tellbar mengde er tellbar. ∎

Oppgave 8 Vi viser først at $(X,\mathcal{T}_u)\to(X,\mathcal{T}_p)$ er kontinuerlig. Det er den dersom alle projeksjonene er kontinuerlige. Dersom $d(\mathbf{x},\mathbf{y})<\epsilon$, så er for enhver $i\in\mathbb{Z}^+$ $d(x_i,y_i)<\epsilon$, som viser at $pr_i:X\to X_i$ er kontinuerlig. Vi har vist at $\mathcal{T}_p\subseteq\mathcal{T}_u$.

For å vise den omvendte inklusjonen er det tilstrekkelig å vise at omegner av formen $B(\mathbf{x}, \epsilon)$ er åpne i produkttopologien, og det de fordi $B(\mathbf{x}, \epsilon) \supseteq \bigcap_{1 \le i \le n} pr_i^{-1}(B(x_i, \epsilon))$ når $n > 1/\epsilon$. ■

Oppgave 9 Urysohns lemma sier at dersom A og B er to disjunkte lukkede mengder i et normalt rom X, så finnes det en kontinuerlig funksjon $f : X \to [0,1]$ slik at $f(x) = 0$ for alle $x \in A$ og $f(x) = 1$ for alle $x \in B$.

I et metrisk rom (X, d), og for en lukket mengde $A \subseteq X$ har vi at $\inf\{d(x,y) \,|\, y \in A\} = d(x, A) = 0$ hvis og bare hvis $x \in A$. Dersom A og B er lukkede og disjunkte har vi at $d(x, A) + d(x, B) > 0$ for alle $x \in X$.

Siden A er lukket så finnes det for enhver x en $a \in A$ slik at $d(A, x) = d(a, x)$. Altså er $d(A, x) + d(x, y) = d(a, x) + d(x, y) \ge d(a, y) \ge d(A, y)$, og dermed er $d(x, y) \ge d(A, x) - d(A, y)$. Av symmetri følger at $d(x, y) \ge d(A, y) - d(A, x)$, så vi har $d(x, y) \ge |d(A, x) - d(A, y)|$ som viser at $d(, A)$ er uniformt kontinuerlig og derfor kontinuerlig.

Dette viser at funksjonen $f(X) = \dfrac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$ er kontinuerlig og tilfredsstiller kravene $0 \le f(x) \le 1$, $f(x) = 0$ for alle $x \in A$ og $f(x) = 1$ for alle $x \in B$. ■

Oppgave 10 Viser først at et filter med ultrafilteregenskapen er maksimalt.

Anta at $\mathcal{F}$ har ultrafilteregenskapen og at $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$. La $U \in \mathcal{F}'$. Da er $X = U \cup (X - U) \in \mathcal{F}$. Dersom $(X - U) \in \mathcal{F}$ følger det at $\emptyset \in \mathcal{F}'$ som er en selvmotsigelse, altså er $U \in \mathcal{F}$.

Anta så at $\mathcal{F}$ er maksimal og at vi har $U \notin \mathcal{F}$, $V \notin \mathcal{F}$ og $U \cup V \in \mathcal{F}$. Dersom $U \cap F \ne \emptyset$ for alle $F \in \mathcal{F}$ vil $\mathcal{F} \cup \{U\}$ generere et filter som er ekte finere enn $\mathcal{F}$ og siden det strider mot maksimaliteten av $\mathcal{F}$, så finnes det en mengde $F_U \in \mathcal{F}$ slik at $U \cap F_U = \emptyset$. Tilsvarende finnes det en mengde $F_V \in \mathcal{F}$ slik at $V \cap F_V = \emptyset$, men da er $\emptyset = F_U \cap F_V \cap (U \cup V) \in \mathcal{F}$. Dette er en selvmotsigelse, så $\mathcal{F}$ har ultrafilteregenskapen. ■

Oppgave 11 En vilkårlig løfting av f er gitt ved oppskriften

$$\tilde{f}_n(t) = \begin{cases} \phi(t) = n & \text{for } 0 \le t \le 1, \\ \rho(t) = 2 - t & \text{for } 0 \le t \le 1, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

En vilkårlig løfting av g er gitt ved oppskriften

$$\tilde{g}_n(t) = \begin{cases} \phi(t) = n + t & \text{for } 0 \le t \le 1, \\ \rho(t) = 1 + t & \text{for } 0 \le t \le 1, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

En vilkårlig løfting av $f * g$ er gitt ved oppskriften

$$(\widetilde{f * g})_n(t) = \begin{cases} \phi(t) = n & \text{for } 0 \le t \le 1/2, \\ \phi(t) = n + 2t - 1 & \text{for } 1/2 \le t \le 1, \\ \rho(t) = 2 - 2t & \text{for } 0 \le t \le 1/2, \\ \rho(t) = 2t & \text{for } 1/2 \le t \le 1, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

■

Oppgave 12 Dersom $r : B^2 \to A$ er en retraksjon og $i : A \to B^2$ er inklusjonen så har den kontinuerlige funksjonen $g = ifr : B^2 \to B^2$ et fikspunkt $x \in B^2$. Siden $x = g(x) = i(f(r(x)))$ ser vi at $x \in A$. Derfor er $x = r(x) = rg(x) = rifr(x) = rif(x) = f(x)$. ■