Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Nils A. Baas
Telefon 73 59 35 19/20

Eksamen i MA3002 Generell topologi

Bokmål
Fredag 20. mai 2011
Tid: 09:00 - 13:00

Hjelpemidler (kode D): Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt
Enkel kalkulator (Hewlett Packard HP30S eller Citizen SR-270X)

Sensur: 10. juni 2011

Oppgave 1

a) La $\mathcal{B}$ være en samling av undermengder av en gitt mengde X.
Hvilke betingelser må være oppfylt for at $\mathcal{B}$ skal være en basis for en topologi på X?

b) La $\mathcal{B}$ være samlingen av undermengder av $X = \mathbb{R}$ som består av

i) alle intervaller $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b, a, b \in \mathbb{R}\}$, og
ii) ett-punkts mengder $\{c\}$ hvor $c < 0$.

Vis at $\mathcal{B}$ er en basis for en topologi $\mathcal{T}$ på $\mathbb{R}$.

c) La Y betegne $\mathbb{R}$ med topologien fra **b)**.
La $f\colon Y \to Y$ være bijeksjonen gitt ved

$$f(x) = x + 2, \quad x \in Y.$$

Vis at f er kontinuerlig.

d) La $g = f^{-1}\colon Y \to Y$ gitt ved $g(x) = x - 2$, $x \in Y$.
Vis at g ikke er kontinuerlig.

Oppgave 2

a) La X være et topologisk rom, Y et Hausdorff rom og $f: X \to Y$ en injektiv, kontinuerlig funksjon.

Vis at da er X et Hausdorff rom.

b) Vis at et lukket underrom av et kompakt rom er kompakt.

c) Vis at et kompakt underrom av et Hausdorff rom er lukket.

Oppgave 3 La $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{N}$ de naturlige tall og ∞ er et element forskjellig fra alle tallene $1, 2, 3, \ldots$ i $\mathbb{N}$.

La $\mathcal{T}$ være følgende familie av delmengder:

i) alle delmengder $A \subset \mathbb{N}$, og

ii) alle delmengder $A \subset X$ slik at $A^{\mathcal{C}} = X - A$ består av et endelig antall elementer (eller er tomt).

a) Vis at $\mathcal{T}$ er en topologi på X.

b) Vis at $(X, \mathcal{T})$ er kompakt.

c) Vis at en funksjon $f: X \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig hvis og bare hvis $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = f(\infty)$.

Oppgave 4

a) Definer et sammenhengende topologisk rom.

b) Vis at unionen av en samling sammenhengende underrom av et topologisk rom X som har minst et felles punkt, er sammenhengende.

c) La $f: X \to Y$ være en kontinuerlig avbildning, og X er sammenhengende.

Vis at da er også $f(X)$ sammenhengende.

Oppgave 5 La X være et topologisk rom slik at ett-punkts mengder er lukkede.

a) Hva vil det si at X er et regulært rom?

b) Vis at X er regulært hvis og bare hvis for ethvert punkt x i X og for enhver omegn U om x, så er der en omegn V om x slik at $\bar{V} \subset U$.