



Faglig kontakt under eksamen: Nils A. Baas
Telefon 73 59 35 19/20

Eksamen i MA3002 Generell topologi

Bokmål
Fredag 22. mai 2009
Tid: 09:00 - 13:00

Hjelpemidler (kode D): Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt
Enkel kalkulator (Hewlett Packard HP30S eller Citizen SR-270X)

Sensur: 12. juni 2009

Oppgave 1 Et topologisk rom (X, \mathcal{T}) er gitt ved:

$$X = \{a, b, c, d, e\}$$
$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

- Bestem de lukkede undermengdene i X .
- Bestem tillukningen til mengdene $\{a\}$, $\{b\}$ og $\{c, e\}$.
- Bestem de tette undermengdene i X .

Oppgave 2 La A, B, A_α (α element av en vilkårlig indeksmengde) være undermengder av et topologisk rom X .

- Vis at $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
- Vis at

$$\overline{\bigcup A_\alpha} \supset \bigcup \bar{A}_\alpha.$$

Gi et moteksempel som viser at likhet ikke holder.

Oppgave 3 La \mathbb{R} være de reelle tall med endelig komplement topologien, det vil si at U er åpen om $\mathbb{R} - U$ er endelig eller hele \mathbb{R} . Vis at det gir en topologi på \mathbb{R} .

Se på følgen $\{\frac{1}{n}\}_{n=1,2,\dots}$. Konvergerer følgen, og i så fall mot hva?

Oppgave 4 Vis at et topologisk rom X er Hausdorff hvis og bare hvis diagonalen Δ er lukket i $X \times X$.

Oppgave 5

a) La G være en åpen delmengde av \mathbb{R}^2 .

Vis at om G er sammenhengende, så er G også veisammenhengende.

b) Er $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ en sammenhengende undermengde?

Oppgave 6 La X og Y være to sammenhengende topologiske rom.

Vis at da er $X \times Y$ sammenhengende.

Oppgave 7 La X være et topologisk rom og $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ en kontinuerlig funksjon.

Vis at dersom X er kompakt, så eksisterer c, d slik at for alle x i X er

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

Oppgave 8 La $X = \mathbb{R}^\infty = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}_i$ hvor $\mathbb{R}_i = \mathbb{R} =$ de reelle tall med vanlig topologi.

Definer $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ ved

$$f(t) = (t, t, t, \dots).$$

Er f kontinuerlig i produkttopologien og i bokstopologien?