**Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**



Faglig kontakt under eksamen: Nils A. Baas
Telefon 73 59 35 19/20

# MA3002 GENERELL TOPOLOGI

Dato: Mandag 2. juni 2008
Tid: 09.00 - 13:00
Hjelpemidler: (Kode D) Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler er tillatt.
Enkel kalkulator (HP 30S) er tillatt
Bokmål

Sensur: 23. juni 2008

## Oppgave 1

La

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \{1,2,3,\cdots\} && \text{og} \\ \mathcal{T} &= \{\emptyset, E_n\} && \text{hvor} \\ E_n &= \{n, n+1, \ldots\}, && n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

**a)** Vis at $\mathcal{T}$ er en topologi på $\mathbf{N}$.

**b)** Finn alle opphopningspunktene til

$$\{4, 13, 28, 37\}$$

**c)** Finn tillukningen til

$$\{7, 24, 47, 85\} \quad \text{og} \quad \{3, 6, 9, 12, \cdots\}$$

**d)** Finn de tette undermengdene i $\mathbf{N}$.

**Oppgave 2**

La $A$ og $B$ være undermengder av et topologisk rom $X$.

**a)** Vis at

$$\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Gi et eksempel som viser at likhet ikke holder.

**b)** La $\{X_i\}_{i \in I}$ være en indeksert familie av topologiske rom. La $A_i \subset X_i$ for alle $i$.
Sett $X = \prod_{i \in I} X_i$.
$X$ kan ha produkttopologien eller bokstopologien. Vis at i begge tilfeller gjelder

$$\Pi \bar{A}_i = \overline{\Pi A_i}$$

**Oppgave 3**

**a)** Definer begrepene sammenhengende og veisammenhengende rom. Hvilken sammenheng er det mellom dem?

**b)** La $A$ være et sammenhengende underrom (delmengde) av et topologisk rom $X$. Vis at om

$$A \subset B \subset \bar{A} \subset X,$$

så er $B$ sammenhengende.

**Oppgave 4**

La $f, g : X \to Y$ være to kontinuerlige funksjoner mellom to topologiske rom $X$ og $Y$, der $Y$ er et Hausdorff rom.

Vis at

$$\{x | f(x) = g(x)\}$$

er lukket i $X$.

**Oppgave 5** Vis følgende:

**a)** Enhver lukket delmengde av et kompakt rom er kompakt.

**b)** Enhver kompakt delmengde av et Hausdorff rom er lukket.

**c)** Ethvert kompakt Hausdorff rom er regulært.

**Oppgave 6**

Er følgende delmengder av $\mathbf{R}$ kompakte?

i) $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} | n \in \{1, 2, 3, \cdots\}\}$

ii) $B = <0, 1]$.

**Oppgave 7**

La $\mathbf{Q}$ betegne de rasjonale tall som en delmengde av de reelle tall $\mathbf{R}$.

**a)** La $p \in \mathbf{Q}$, vis at $\mathbf{R} - \{p\}$ er tett i $\mathbf{R}$.

**b)** Vis at mengden av de irrasjonale tall $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ kan skrives som et tellbart snitt av åpne tette delmengder i $\mathbf{R}$.