Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Eldar Straume
(Telefon 735 96683)

EKSAMEN I MA3002 GENERELL TOPOLOGI

Fredag 25. mai 2007
Tid: kl. 09.00 - 13.00
Tillatte hjelpemidler: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Enkel kalkulator (HP30S)
Bokmål

Sensuren faller 15. juni 2007.

Oppgave 1 La X være et topologisk rom med en tellbar basis. Vis at X er separabelt (det vil si, har en tellbar tett delmengde). Avgjør også om de reelle tall $\mathbb{R}$ (med standard topologien) er separabelt?

Oppgave 2 For $A \subset X$ vis identiteten

$$\bar{A} - \mathrm{Int}A = \bar{A} \cap (\overline{X - A}).$$

(Denne mengden betegnes ofte ∂A og kalles randen til A).

Oppgave 3 La $A \subset X$ og la $f\colon A \to Y$ være en kontinuerlig funksjon, hvor X er metriserbar, A har underromstopologien, og Y er et Hausdorff rom.

a) Vis at hvis f kan utvides til en kontinuerlig funksjon $g\colon \bar{A} \to Y$, så er utvidelsen g entydig bestemt.

b) Anta nå at $Y = \mathbb{R}$ og at utvidelsen av f til $\bar{A}$ i punkt **a)** eksisterer. Kan f utvides videre til en kontinuerlig funksjon på hele X? Begrunn svaret.

Oppgave 4 La (X, d) være et metrisk rom, og for delmengder $A \subset X$ definer avstandsfunksjonen

$$d_A(x) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

a) Anta nå at A er lukket. Vis at $d_A(x) = 0$ hvis og bare hvis $x \in A$, og vis at funksjonen $d_A \colon X \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, for eksempel ved at du først etablerer ulikheten

$$d_A(x) \leq d(x, y) + d_A(y) \quad \text{for alle } x, y \in X.$$

b) Ved å benytte resultatene ovenfor, gi et enkelt bevis for Urysohns lemma for metriske rom: Hvis A og B er lukket og disjunkte mengder i X, så finnes en kontinuerlig funksjon $f \colon X \to [0, 1]$ slik at $f(A) = \{0\}$ og $f(B) = \{1\}$.

Oppgave 5 Vi definerer en ekvivalensrelasjon $\equiv$ på kvadratet $[0, 1] \times [0, 1] = [0, 1]^2$ ved at $(s, 0) \equiv (s, 1)$ og $(0, t) \equiv (1, t)$ for alle $s, t \in [0, 1]$. Vis at rommet av ekvivalensklasser, med kvotienttopologien, er homeomorf med den 2-dimensjonale torus T^2, altså

$$\frac{[0, 1]^2}{\equiv} \approx S^1 \times S^1 = T^2.$$

Oppgave 6 La $B^2 = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid |p| \leq 1\}$ være enhetsdisken i planet.

a) Vis at B^2 har triviell fundamentalgruppe, det vil si, $\pi_1(B^2) = \{e\}$. Hvis $p \colon X \to B^2$ er en overdekkningsavbildning, hva kan du si om rommet X?

b) Produktrommet $S^1 \times B^2$ kalles en solidtorus, og vi kan realisere den i 3-rommet som en "smultring" med torusen T^2 som overflate eller rand. Vis at det ikke finnes noen retraksjon

$$r \colon S^1 \times B^2 \to T^2.$$

(Med en retraksjon av X på et underrom A menes en kontinuerlig funksjon $r \colon X \to A$ slik at $r(x) = x$ for alle $x \in A$.) Det opplyses at for et produktrom $X \times Y$ har vi følgende isomorfi mellom grupper

$$\pi_1(X \times Y) \simeq \pi_1(X) \times \pi_1(Y).$$

Videre oppgis resultatet fra gruppeteori om at det ikke finnes noen surjektiv homomorfi $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$.

Oppgave 7 La (X, d) være et kompakt metrisk rom, og $f: X \to X$ en funksjon som har egenskapen

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \text{når } x \neq y.$$

Punktene i denne oppgaven utgjør et bevis for at f har et entydig fikspunkt p, det vil si, $f(p) = p$.

a) Diameteren til en delmengde $A \subset X$ defineres som

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

Hvis A er lukket, begrunn hvorfor det finnes to punkter x_0, y_0 i A slik at $\operatorname{diam}(A) = d(x_0, y_0)$.

b) Vis at hvis $A \neq \emptyset$, A er lukket og $f(A) = A$ så består A bare av ett punkt. Sett så

$$A_1 = f(X), A_2 = f^2(X) = f(A_1), \ldots, A_{k+1} = f^k(X) = f(A_k), \ldots$$
$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Begrunn hvorfor $A \neq \emptyset$, A er lukket og $f(A) = A$. (Hint: Det vanskelige punktet er å vise at $A \subset f(A)$. Her kan en benytte det faktum at enhver følge i X har en konvergent delfølge. Uttrykk $x \in A$ som $f^{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ og se nå på følgen $\{y_k\}$ hvor $y_k = f^k(x_k)$.)