Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Finn Faye Knudsen tlf. 73 59 35 23

EKSAMEN I MA3002 GENERELL TOPOLOGI

Bokmål
Torsdag 2. juni 2005
kl. 09:00–13:00

Hjelpemidler (kode D): Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Enkel kalkulator (HP 30S)

Sensurdato: 23. juni 2005.

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1 La $A \subseteq X$ og $B \subseteq Y$ være vilkårlige underrom. Vis at $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Oppgave 2 Vis at et rom X er Hausdorff hvis og bare hvis diagonalen Δ er lukket i $X \times X$.

Oppgave 3 Vis at en kompakt delmengde av et Hausdorffrom er lukket.

Oppgave 4 La $f : X \to Y$ være en kontinuerlig bijeksjon fra et kompakt rom X til et Hausdorff rom Y. Hva kan du si om f^{-1}?

Oppgave 5 La $\mathcal{T}$ og $\mathcal{T}'$ være to topologier på mengden X, og anta at $\mathcal{T}'$ er finere enn $\mathcal{T}$. Dersom X er sammenhengende i den ene av de to topologiene, hva kan du si om sammenhengen av X i den andre?

Oppgave 6 La $A \subsetneq X$ og $B \subsetneq Y$ være ekte undermengder av X og Y, og anta at både X og Y er sammenhengende topologiske rom. Vis at $(X \times Y) - (A \times B)$ er sammenhengende.

Oppgave 7 Vis at det fins en *tellbar* basis for ordningstopologien på de reelle tallene $\mathbb{R}$.

Oppgave 8 La $\{X_\alpha, d_\alpha\}$, $\alpha \in A$, være en indeksert familie av metriske rom og la $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ være produktmengden. Vi skal anta at d_α er begrenset av 1 for hver α. Da kan vi definere den *uniforme* metrikken på X som følger. Dersom $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ og $\mathbf{y} = (y_\alpha)$, så er $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\{d_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) \mid \alpha \in A\}$. Den *uniforme* topologien på X er topologien tilhørende den uniforme metrikken.

La n være et helt positivt tall og la X_n være det lukkede intervallet $[0, 1/n]$. La d_n være metrikken på X_n nedarvet fra standardmetrikken på $\mathbb{R}$. Sammenlign produktromstopologien $\mathcal{T}_p$ og den uniforme topologien $\mathcal{T}_u$ på produktmengden $X = \prod_{n \in \mathbb{Z}_+} X_n$.

Oppgave 9 Gi et direkte bevis for Urysohns lemma for et metrisk rom (X, d) ved hjelp av funksjonen $f(x) = \dfrac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$.

Oppgave 10 Et filter $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ på X sies å ha *ultrafilteregenskapen*, dersom for ethvert par av mengder A og B, $A \cup B \in \mathcal{F}$ hvis og bare hvis $A \in \mathcal{F}$ eller $B \in \mathcal{F}$.

Vis at et filter $\mathcal{F}$ er maksimalt, det vil si et ultrafilter, hvis og bare hvis det har ultrafilteregenskapen.

Oppgave 11 Betrakt overdekningsavbildningen $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$, gitt ved formelen $p(\phi, \rho) = (\rho \cos 2\pi\phi, \rho \sin 2\pi\phi)$. Beskriv ved tegning løftingene av veiene

$$\begin{aligned} f(t) &= (2 - t, 0) & t &\in [0,1] \\ g(t) &= ((1+t)\cos 2\pi t, (1+t)\sin 2\pi t) & t &\in [0,1] \\ h(t) &= (f * g)(t) & t &\in [0,1] \end{aligned}$$

Oppgave 12 La B^2 være den lukkede enhetsskiva i planet $\mathbb{R}^2$, og la $A \subseteq B^2$ være en retraksjon. Bruk Browers fikspunktteorem til å vise at enhver kontinuerlig funksjon $f : A \to A$ har et fikspunkt.